OSCILAŢII ŞI UNDE

Dumitru Luca
Universitatea *Al. I. Cuza* Iaşi

Cristina Stan
Universitatea *Politehnica* Bucureşti

11 februarie 2007

Cuprins

1 Mişcarea oscilatorie **1**

1.1 Oscilaţii liniare libere . . . 1

1.1.1 Reprezentarea fazorială . . . 4

1.1.2 Energia mişcării oscilatorii armonice . . . 5

1.1.3 Exemplu. Pendulul matematic . . . 5

1.1.4 Un exemplu din electricitate. Circuitul LC serie . . . 6

1.1.5 Studiul mişcării oscilatorii în spaţiul fazelor . . . 7

1.2 Oscilatori cuplaţi . . . 8

1.2.1 Oscilatori cuplaţi identici . . . 8

1.2.2 Determinarea matriceală a modurilor normale . . . 11

1.2.3 Oscilatori cuplaţi diferiţi . . . 12

1.3 Compunerea oscilaţiilor paralele de frecvenţe diferite . . . 13

1.4 Compunerea oscilaţiilor paralele de aceeaşi frecvenţă . . . 16

1.5 Compunerea oscilaţiilor armonice perpendiculare . . . 17

1.6 Oscilaţii amortizate . . . 19

1.6.1 Studiul mişcării amortizate în spaţiul fazelor . . . 23

1.7 Oscilaţii forţate . . . 23

1.7.1 Fenomenul de rezonanţă . . . 25

1.7.2 Amplitudini absorbtive şi amplitudini elastice . . . 28

1.7.3 Analogia electro-mecanică . . . 29

1.8 Oscilaţii forţate - cazul în care forţa exterioară este anarmonică . . . 32

1.8.1 Exemplu. Semnal triunghiular . . . 34

1.9 Oscilaţii neliniare (anarmonice) . . . 34

1.9.1 Oscilatorul van der Pol . . . 37

1.9.2 Oscilaţii neliniare forţate . . . 38

1.9.3 Analiza în spaţiul fazelor a mişcării oscilatorului neliniar forţat . . . 42

1.10 Probleme . . . 43

2 Propagarea perturbaţiilor mecanice în medii elastice. Unde elastice 47
2.1 Ecuaţia diferenţială a propagării unei perturbaţii longitudinale printr-un mediu elastic solid . . . 47
2.2 Ecuaţia diferenţială a propagării unei perturbaţii transversale printr-un mediu elastic solid . . . 49
2.3 Ecuaţia diferenţială a propagării unei perturbaţii longitudinale într-un mediu elastic fluid . . . 50
2.4 Ecuaţia diferenţială a propagării perturbaţiilor transversale într-o coardă vibrantă 53
2.5 Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale de propagare a unei perturbaţii printr-un mediu elastic. Unde elastice . . . 55
2.6 Energia transportată de unda elastică . . . 62
2.6.1 Unde circulare . . . 63
2.6.2 Unde sferice . . . 64

3 Propagarea undelor elastice în medii elastice neomogene 67
3.1 Reflexia şi transmisia undelor elastice . . . 67
3.1.1 Reflexia totală a undelor elastice uni-dimensionale . . . 70
3.1.2 Reflexia oblică a undelor. Ghiduri de undă . . . 71
3.2 Impedanţa specifică de undă. Impedanţa sonoră . . . 76
3.3 Interferenţa undelor . . . 78
3.4 Difracţia . . . 80
3.4.1 Difracţia Fraunhoffer pe o fantă dreptunghiulară . . . 82
3.5 Dispersia undelor. Viteza de grup . . . 86
3.6 Efectul Doppler . . . 91
3.6.1 Sursa mobilă, observator fix . . . 91
3.6.2 Sursa fixă, receptor aflat în mişcare . . . 93
3.7 Absorbţia undelor elastice . . . 95
3.8 Probleme . . . 96

Capitolul 1

Mişcarea oscilatorie

Una dintre cele mai importante mişcări cunoscute în natură este *mişcarea oscilatorie. O mişcare periodică, ce se reia cu regularitate la intervale egale de timp se numeşte mişcare oscilatorie*. Ea apare în urma aplicării unei mici perturbaţii unui sistem, aflat iniţial în echilibru stabil.

Mişcări oscilatorii se întâlnesc în natură într-o mare diversitate de sisteme (fizice, chimice, biologice etc). În fizică sunt cunoscute sisteme oscilante de natură şi dimensiuni spaţiale foarte diferite. Mişcări oscilatorii execută, de exemplu, ionii reţelei cristaline dintr-un solid, dar şi anumite stele duble. Mişcări oscilatorii pot fi efectuate, în anumite condiţii, de către componentele atomilor sau nucleelor, dar şi de către unele sisteme stelare.

Modele operaţional simple de sisteme oscilante sunt *pendulul matematic* şi *pendulul elastic*. În primul caz este vorba de un corp de mici dimensiuni, suspendat în câmpul gravitaţional de un fir sau o tijă de masă neglijabilă, inextensibilă. În al doilea caz este vorba de un corp legat de capătul unui resort de masă neglijabilă. Resortul şi corpul sunt plasate, fie în câmpul gravitaţional terestru, fie pe un suport orizontal, în absenţa frecărilor.

Deşi natura fizică a oscilatorilor este foarte diferită, *există o serie de caracteristici generale ale mişcării oscilatorii, care se regăsesc în cazul tuturor sistemelor oscilante*. Aşa cum vom vedea ulterior, folosind un aparat matematic relativ simplu, se pot defini câteva mărimi adimensionale ce caracterizează orice tip de oscilator. Mai mult decât atât, se pot stabili o serie de analogii între mărimi de natură diferită, specifice unor oscilatori de natură diferită[1] şi se pot scrie direct o serie de rezultate, plecându-se de la oricare din domeniile în care astfel de sisteme oscilante sunt studiate.

1.1 Oscilaţii liniare libere

Să considerăm unul dintre cele mai simple exemple de sisteme mecanice oscilante, cel al unui corp de masă m fixat de un perete rigid printr-un resort de constantă elastică k, în absenţa

[1] In decursul acestui capitol vom discuta, de exemplu, o analogie mecano-electrică, pe baza căreia se pot defini o serie de mărimi noi în mecanică, plecând de la mărimi foarte cunoscute în electricitate.

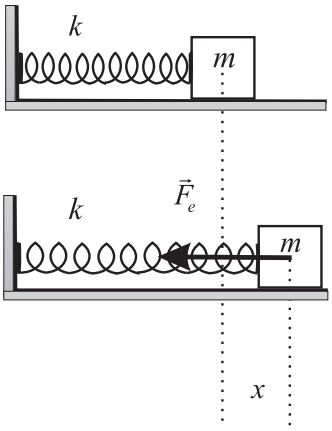

Figura 1.1: Un pendul elastic, constituit dintr-un corp de masă m, cuplat cu un resort de constantă elastică k.

frecării (vezi Fig.1.1). Vom nota deplasarea faţă de poziţia de echilibru[2], la momentul de timp t, cu $x(t)$. Forţa elastică ($\vec{F}_e$) este singura forţă necompensată, întrucât greutatea corpului de masă m ($\vec{G}$) este anulată de către reacţiunea normală din partea planului. Aplicând principiul al II-lea al dinamicii, găsim ecuaţia diferenţială a mişcării:

$$m\,\ddot{x}\,(t) = -kx(t). \tag{1.1}$$

Semnul minus din expresia forţei indică faptul că forţa elastică dezvoltată în resort tinde să micşoreze deformaţia resortului. Trecând totul în membrul stâng al ecuaţiei precedente şi împărţind prin m se obţine:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0. \tag{1.2}$$

Mărimea ω_0, definită de relaţia:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.3}$$

se numeşte *pulsaţia proprie a mişcării*[3]. După cum rezultă şi din modul în care a fost definită, pulsaţia proprie este o mărime specifică oscilatorului. Ea nu depinde de regimul în care acesta se mişcă, fiind un fel de "carte de identitate" a oricărui oscilator.

O altă mărime specifică mişcării oscilatorii este *frecvenţa proprie* a acestuia, notată cu ν. Ea reprezintă *numărul de oscilaţii complete ce se produc în interval de 1s.* Unitatea de măsură a frecvenţei este s^{-1} sau Hertz (Hz).

Pulsaţia ω_0 este *numărul de oscilaţii complete ce se produc în 2π secunde.* Unitatea de măsură a pulsaţiei este $rad\ s^{-1}$. Între cele două mărimi există relaţia:

$$\omega_0 = 2\pi\nu. \tag{1.4}$$

[2]Perturbaţia faţă de starea de echilibru poate fi, în general, o distanţă, un unghi, dar şi o sarcină electrică deplasată într-un circuit, o concentraţie, un potenţial etc.

[3]Uneori, pulsaţia mişcării se mai numeşte şi *frecvenţă unghiulară*, deşi cele două mărimi diferă printr-un factor de 2π.

Relaţia (1.1) ne permite să interpretăm pătratului pulsaţiei proprii, ca *forţa ce acţionează asupra unităţii de masă, pe unitatea de deplasare*, $\omega^2 = k/m = F/m/x$.

Perioada proprie a mişcării reprezintă *timpul în care are loc o oscilaţie completă a sistemului*. Expresia ei este:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{1.5}$$

În cazul micilor oscilaţii, perioada mişcării nu depinde de amplitudinea acestora, de aceea se spune că micile oscilaţii sunt *izocrone*.

Este foarte uşor de verificat că ecuaţia (1.2) admite o soluţie de forma:

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t. \tag{1.6}$$

Constantele A şi B se determină din condiţiile iniţiale ale elongaţiei şi, respectiv, vitezei:

$$A = x(0), \tag{1.7}$$

$$B = \frac{\omega_0}{\dot{x}\,(0)}. \tag{1.8}$$

Există mai multe modalităţi de exprimare a soluţiei ecuaţiei (1.2). De exemplu, înlocuind constantele A şi B din ecuaţia (1.6) cu alte două constante, C şi φ, definite prin relaţia:

$$\begin{aligned} A &= C\cos\varphi, \\ B &= C\sin\varphi, \end{aligned} \tag{1.9}$$

se poate exprima legea de mişcare $x(t)$ sub forma unei singure funcţii armonice, de amplitudine C şi fază iniţială φ:

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t - \varphi). \tag{1.10}$$

O a treia posibilitate de exprimare a soluţiei, cea mai comodă din punct de vedere al calculului matematic, este cea în care se folosesc numere complexe. Forma funcţiei de variabilă complexă care descrie mişcarea este sugerată de constatările experimentale, care arată că atât elongaţia x, cât şi derivatele sale de ordinul I şi ordinul II respectă acelaşi tip de dependenţă temporală. Evident, o dependenţă având în expresia sa funcţia exponenţială e^x ar putea fi o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale (1.2). Aşadar, se alege drept soluţie funcţia:

$$x(t) = Ce^{\lambda t}. \tag{1.11}$$

Vom calcula acum derivata a doua a lui $x(t)$ şi o vom înlocui, împreună cu $x(t)$ în ecuaţia (1.2). Se observă că ambii termeni din ecuaţia ce se obţine în urma acestei înlocuiri, au factor comun cantitatea $Ce^{\lambda t}$, adică $x(t)$. Cum ne interesează să găsim o soluţie ne-banală, $Ce^{\lambda t} \neq 0$, rezultă ecuaţia algebrică:

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0, \tag{1.12}$$

numită *ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei diferenţiale* (1.2) . Rezolvarea ecuaţiei caracteristice ne permite determinarea valorilor constantei λ:

$$\lambda_{1,2} = \pm j\omega_0, \quad j = \sqrt{-1}. \tag{1.13}$$

Am găsit, aşadar, două valori ale lui λ care verifică această ecuaţie[4]. Soluţia generală a ecuaţiei oscilatorului armonic va fi o combinaţie liniară a celor două soluţii particulare[5]:

$$x(t) = A_+ e^{j\omega_0 t} + A_- e^{-j\omega_0 t}, \tag{1.14}$$

unde A_+, A_- sunt mărimi complexe.

Folosind reprezentarea trigonometrică a numerelor complexe:

$$e^{\pm j\alpha} = \cos\alpha \pm j \sin\alpha, \tag{1.15}$$

rezultă că soluţia (1.14) este echivalentă cu celelalte forme (1.10) şi (1.6), deoarece:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_+(\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t) + A_-(\cos\omega_0 t - j\sin\omega_0 t) && (1.16)\\ &= (A_+ + A_-)\cos\omega_0 t + j(A_+ - A_-)\sin\omega_0 t && (1.17)\\ &= A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = C\cos(\omega_0 t - \varphi). && (1.18) \end{aligned}$$

1.1.1 Reprezentarea fazorială

O formă echivalentă de exprimare a soluţiei complexe (1.14) este:

$$x(t) = Ce^{j(\omega_0 t - \varphi)}, \tag{1.19}$$

unde C şi φ sunt două constante arbitrare, independente de timp. Folosind reprezentarea cu ajutorul numerelor complexe, fiecare oscilaţie se poate considera ca proiecţia pe o axă a unui *vector rotitor* (*fazor*) de mărime egală cu amplitudinea mişcării, ce se roteşte în sens trigonometric cu viteza unghiulară ω_0. Fazorul viteză, $v(t)$ este descris de relaţiile:

$$\begin{aligned} v(t) &= j\omega_0 Ce^{j(\omega_0 t-\varphi)} && (1.20)\\ &= \omega_0 Ce^{j(\omega_0 t-\varphi+\frac{\pi}{2})} && (1.21)\\ &= \omega_0 x(t)e^{j\frac{\pi}{2}}, && (1.22) \end{aligned}$$

iar fazorul acceleraţie, de relaţiile:

$$\begin{aligned} a(t) &= -\omega_0^2 Ce^{j(\omega_0 t-\varphi)} && (1.23)\\ &= \omega_0^2 Ce^{j(\omega_0 t-\varphi+\pi)} && (1.24)\\ &= \omega_0^2 x(t)e^{j\pi}. && (1.25) \end{aligned}$$

În Fig.1.2 sunt reprezentaţi fazorii elongaţiei (linia cea mai groasă), vitezei (linia cea mai subţire) şi acceleraţiei în cazul mişcării oscilatorie armonice. În partea dreaptă sunt vizualizate aceste mărimi în domeniul timp. Fazorul vitezei este defazat înainte cu $\pi/2$ faţă de acela al elongaţiei, în timp ce fazorul acceleraţiei este defazat cu $\pi/2$ faţă de cel al vitezei şi deci cu π faţă de elongaţie. Ansamblul lor se roteşte cu aceeaşi viteză unghiulară ω_0.

[4]Numărul de soluţii λ este egal cu gradul ecuaţiei caracteristice şi, deci, cu ordinul ecuaţiei diferenţiale a mişcării. Aşadar, orice ecuaţie diferenţială de ordinul II admite două soluţii particulare.

[5]Proprietatea ca orice combinaţie liniară de soluţii să fie o nouă soluţie a sistemului (*principiul superpoziţiei*) este proprie doar ecuaţiilor diferenţiale liniare. Acest lucru face ca legile fizicii guvernate de ecuaţii liniare să fie mult mai uşor de înţeles şi explicat decât cele guvernate de ecuaţii neliniare.

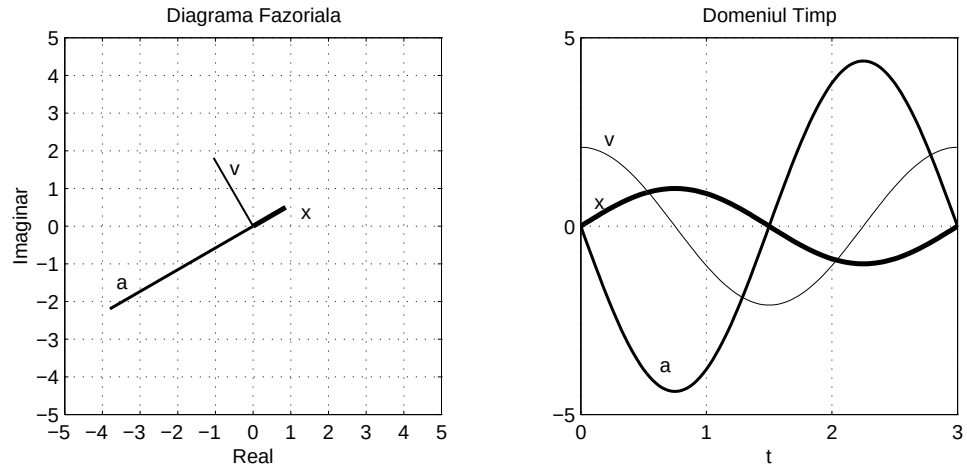

Figura 1.2: Reprezentarea fazorială şi în domeniul timp pentru elongaţia x, viteza v şi acceleraţia a, în cazul unei mişcări armonice simple

1.1.2 Energia mişcării oscilatorii armonice

Energia totală a mişcării este suma energiilor cinetice şi potenţiale ale oscilatorului:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + E_p(t). \tag{1.26}$$

Energia potenţială, determinată de forţa elastică, este:

$$E_p(t) = -\int_0^x (-kx(t))dx = \frac{1}{2}kx^2(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2(t). \tag{1.27}$$

Ca urmare:

$$E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 C^2 \sin^2(\omega_0 t - \varphi) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 C^2 \cos^2(\omega_0 t - \varphi) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 C^2. \tag{1.28}$$

Aşa cum ne aşteptam, energia totală a oscilatorului liniar este o constantă a mişcării.

1.1.3 Exemplu. Pendulul matematic

Să determinăm legea de mişcare şi frecvenţa de oscilaţie a unui corp cu masa m suspendat de un fir inextensibil de lungime L (*pendul matematic*) lăsat liber la momentul iniţial $t = 0$, din poziţia θ_0.

Fie θ unghiul pe care îl face firul cu axa verticală (vezi Fig.1.3). Coordonata care descrie depărtarea faţă de poziţia de echilibru este lungimea arcului, s ($s = L\theta$). Forţa care produce mişcarea este componenta tangenţială a greutăţii (componenta normală este compensată de tensiunea din fir!). Ca urmare:

$$m(\ddot{L\theta}) = -mg\sin\theta, \tag{1.29}$$

sau, trecând totul în primul membru al ecuaţiei şi împărţind prin mL:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0. \tag{1.30}$$

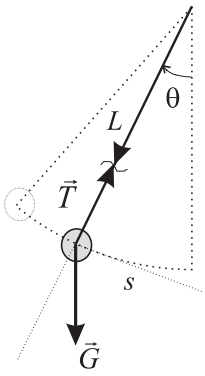

Figura 1.3: Un pendul matematic cu masa m şi lungimea L.

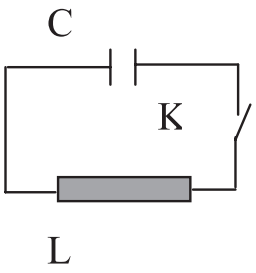

Figura 1.4: Circuit LC serie.

În aproximaţia micilor oscilaţiilor ale pendulului, $sin\theta \cong \theta$, aşa încât:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0. \tag{1.31}$$

Prin identificarea termenilor găsim:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}. \tag{1.32}$$

Alegând soluţia de forma (1.10), constantele C (amplitudinea mişcării) şi φ (faza iniţială) se determină din condiţiile iniţiale, $\theta(0) = \theta_0;\ \dot{\theta}(0) = 0$.

Ecuaţia de mişcare a pendulului are, în concluzie, expresia:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_0 t. \tag{1.33}$$

1.1.4 Un exemplu din electricitate. Circuitul LC serie

Să analizăm oscilaţiile libere care apar într-un circuit electric format dintr-o bobină de inductanţă L şi un condensator de capacitate C, legate în serie (Fig.1.4).

Să considerăm că, printr-o metodă oarecare, condensatorul C s-a încărcat cu sarcina electrică q_0. Aceasta înseamnă că o sarcină negativă $-q_0$ a fost deplasată de pe o armătură, pe cealaltă. Cum ambele armături erau iniţial neutre, armătura de pe care s-a luat sarcina $-q_0$ rămâne încărcată cu sarcina $+q_0$, iar armătura pe care am adus această sarcină va deveni încărcată cu sarcina $-q_0$. După închiderea întrerupatorului K la momentul $t_0 = 0$, la un moment ulterior, t, sarcina electrică rămasă încă nedeplasată este $q(t)$:

$$q(t) = Cu(t) = CL\frac{di}{dt} = CL\,\frac{d^2q}{dt^2}. \tag{1.34}$$

În ecuaţia anterioară am ţinut cont că tensiunea la bornele condensatorului este, în orice moment după închiderea întrerupătorului K, egală cu tensiunea la bornele inductanţei L, care, la rândul ei este: $u_L = -Ldi/dt$. Ecuaţia anterioară conduce, după rearanjarea termenilor, la *ecuaţia diferenţială a sarcinii electrice transportate prin circuit*:

$$\ddot{q}(t) + \frac{1}{CL}q(t) = 0, \tag{1.35}$$

având soluţia:

$$q(t) = q_0 \cos\sqrt{\frac{1}{LC}}\,t. \tag{1.36}$$

1.1.5 Studiul mişcării oscilatorii în spaţiul fazelor

O alternativă interesantă de studiu a mişcării oscilatorii armonice o reprezintă recurgerea la un sistem de coordonate bi-dimensional, denumit *spaţiul fazelor*, în care coordonatele sunt elongaţia şi viteza mobilului.

Ecuaţia diferenţială (1.2) se poate scrie ca un sistem de două ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y; \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 x. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Eliminând variabila timp, prin artificiul matematic:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\omega_0^2 x}{y}, \tag{1.38}$$

se găseşte:

$$y\frac{dy}{dx} = -\omega_0^2 x, \tag{1.39}$$

de unde, după separarea variabilelor şi integrare, rezultă:

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 = const. \tag{1.40}$$

Locul geometric al punctelor (x, y) care îndeplinesc condiţia (1.40) este o familie de elipse concentrice. Fiecare punct de pe elipsă specifică starea sistemului (adică poziţia şi viteza sa)

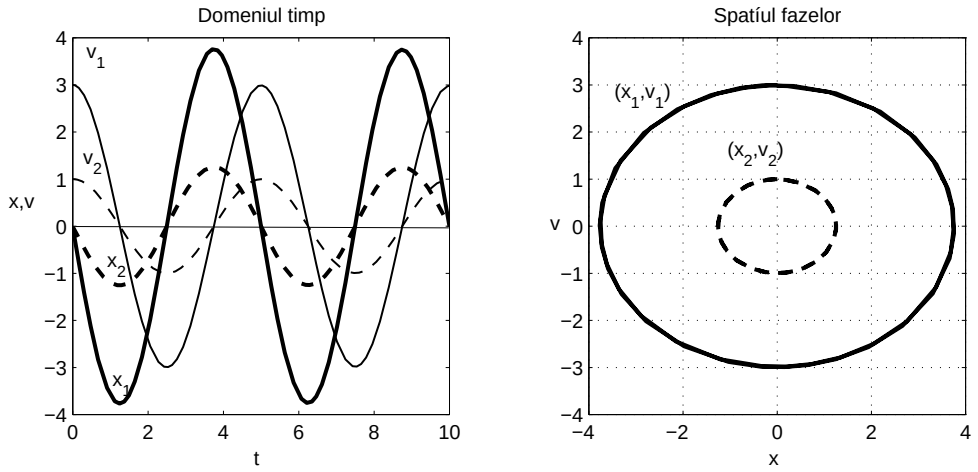

Figura 1.5: Reprezentarea în domeniul timp şi în spaţiul fazelor a elongaţiei x (linie groasă) şi a vitezei v (linie subţire) pentru oscilatorul liniar armonic, pentru două condiţiile iniţiale diferite: (x_1, v_1) şi (x_2, v_2)

la un moment dat, iar fiecare elipsă corespunde unei anumite valori a constantei *const.* (care este dictată de energia totală a oscilatorului).

În Fig.1.5 este ilustrată legătura dintre reprezentarea unei mişcări oscilatorii armonice în domeniul timp şi în spaţiul fazelor, pentru două condiţii iniţiale diferite. Fiecare curbă închisă din spaţiul fazelor corespunde unei mişcări periodice, în sensul că fiecare stare (x, v) "*călătoreşte*" pe traiectoria închisă corespunzătoare şi ajunge în aceeaşi poziţie după fiecare perioadă.

1.2 Oscilatori cuplaţi

Să analizăm ce se întâmplă cu caracteristicile mişcării periodice a unui oscilator armonic, dacă acesta se cuplează cu un al doilea, care poate avea proprietăţi identice sau diferite.

1.2.1 Oscilatori cuplaţi identici

Notăm deplasările faţă de poziţia de echilibru cu x_1, respectiv x_2. Forţele elastice ce apar în fiecare resort ca rezultat al deformărilor (Fig.1.6) sunt:

$$F_1 = -kx_1; \tag{1.41}$$
$$F_2 = -kx_2. \tag{1.42}$$

Deoarece corpurile sunt legate între ele printr-un resort, acesta va cupla mişcările. Deformarea resortului din mijloc va fi $x_1 - x_2$, fapt ce va determina apariţia unei forţe de revenire suplimentare, la cele doua capete:

$$F_{12} = -F_{21} = k(x_2 - x_1). \tag{1.43}$$

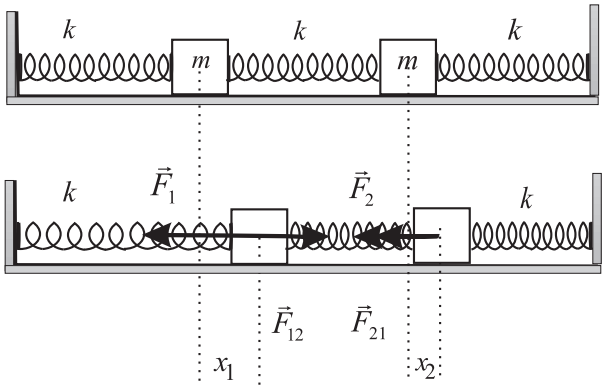

Figura 1.6: Două pendule elastice identice, cuplate prin intermediul unui resort elastic.

Aplicând principiul II al dinamicii pentru mişcarea celor două corpuri, vom obţine un *sistem de ecuaţii diferenţiale*:

$$m\,\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1); \tag{1.44}$$
$$m\,\ddot{x}_2 = -kx_2 - k(x_2 - x_1). \tag{1.45}$$

sau:

$$\ddot{x}_1 + \frac{k}{m}(2x_1 - x_2) = 0; \tag{1.46}$$
$$\ddot{x}_2 + \frac{k}{m}(2x_2 - x_1) = 0. \tag{1.47}$$

Constatăm că cele două ecuaţii diferenţiale nu sunt independente, ci *cuplate*, în sensul că în ecuaţia diferenţială a unui oscilator apare ca variabilă elongaţia celuilalt oscilator. Pentru a o obţine ecuaţiile de mişcare pentru fiecare oscilator în parte, trebuie căutată o procedură de decuplare a ecuaţiilor diferenţiale (1.46), (1.47). Întrucât acest sistem de ecuaţii este simetric, adunând şi apoi scăzând cele două ecuaţii, putem obţine două ecuaţii diferenţiale independente. Noile coordonate sunt acum $x_1 + x_2$ şi $x_1 - x_2$:

$$(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \frac{k}{m}(x_1 + x_2) = 0; \tag{1.48}$$
$$(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 3\frac{k}{m}(x_1 - x_2) = 0. \tag{1.49}$$

Soluţiile celor două ecuaţii pot fi scrise sub forma:

$$x_1 + x_2 = A_+ \cos(\omega t - \phi_+); \tag{1.50}$$
$$x_1 - x_2 = A_- \cos(\sqrt{3}\omega t - \phi_-), \tag{1.51}$$

unde:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}. \tag{1.52}$$

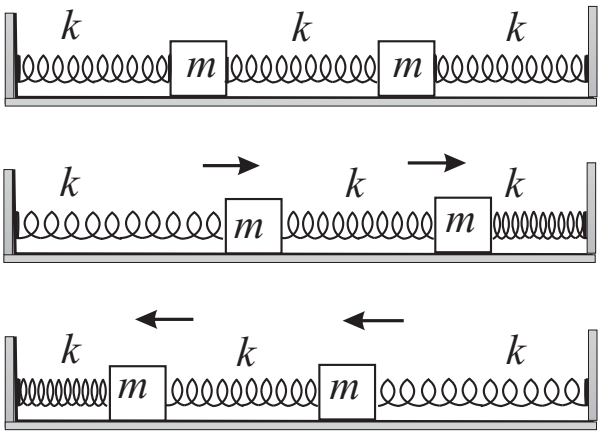

Figura 1.7: Ilustrarea modului normal "+" în care corpurile oscilează în fază, cu amplitudini egale; resortul de cuplaj rămâne în permanenţă nedeformat.

Legile de mişcare pentru fiecare corp se regăsesc prin revenirea la coordonatele iniţiale. Se adună şi se scad ecuaţiile (1.50) şi (1.51):

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\left[A_+\cos(\omega t-\phi_+)+A_-\cos(\sqrt{3}\omega t-\phi_-)\right]; \quad (1.53)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}\left[A_+\cos(\omega t-\phi_+)-A_-\cos(\sqrt{3}\omega t-\phi_-)\right]. \quad (1.54)$$

Constantele A_+, A_-, ϕ_+, ϕ_- se determină din cele patru condiţii iniţiale referitoare la poziţiile şi vitezele celor două corpuri.

Oscilaţiile în care ambele corpuri vibrează cu aceeaşi frecvenţă şi fază iniţială se numesc *modurile normale* de oscilaţie. Din ecuaţiile (1.53), (1.54) se observă că, dacă A_+ sau A_- sunt zero, ambele corpuri vor oscila cu frecvenţa ω, respectiv $\sqrt{3}\omega$.

În modul normal reprezentat în Fig.1.7, pe care să-l numim "+" sau *simetric*, corpurile oscilează în fază, cu amplitudini egale, astfel că resortul de cuplaj nu este nici un moment deformat:

$$x_1(t) = x_2(t). \quad (1.55)$$

În cel de-al doilea mod normal, ilustrat în Fig.1.8, pe care să-l numim "−" sau *antisimetric*, oscilatorii sunt în antifază, amplitudinile sunt egale ca mărime, dar opuse ca semn, astfel că mişcarea este simetrică, dar în sensuri contrare:

$$x_1(t) = -x_2(t). \quad (1.56)$$

În aceste condiţii, resortul de cuplaj este deformat la maximum.

Dacă interpretăm pulsaţia ca fiind forţa de revenire ce acţionează pe unitatea de masă şi de deplasare, atunci, forţa de revenire ce acţionează asupra fiecărui corp este de trei ori mai mare în modul antisimetric decât în modul simetric. Acest lucru se produce din cauza valorii mari a forţei de revenire ce apare în resortul de cuplaj, în condiţiile în care el este deformat la maxim (cu aceeaşi amplitudine, la ambele capete).

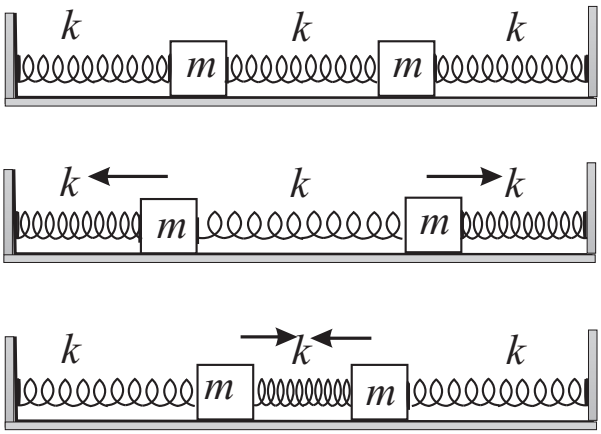

Figura 1.8: Ilustrarea modului normal "-" în care corpurile oscilează în opoziţie de fază, astfel că resortul de cuplaj este deformat la valoarea maximă.

1.2.2 Determinarea matriceală a modurilor normale

În cazuri mai generale, atunci când oscilatorii nu sunt identici sau când există un cuplaj între mai mulţi oscilatori, pentru decuplarea ecuaţiilor şi determinarea modurilor normale se foloseşte *metoda matriceală*.

Vom exemplifica această metodă pentru cazul simplu a doi oscilatori, ale căror mişcări sunt descrise de ecuaţiile scrise generic sub forma:

$$\ddot{x} = -a_{11}x - a_{12}y; \tag{1.57}$$
$$\ddot{y} = -a_{21}x - a_{22}y, \tag{1.58}$$

unde a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} sunt coeficienţi constanţi.

Să presupunem că există un mod de vibraţie în care ambele corpuri oscilează cu aceeaşi pulsaţie (ω) şi fază iniţială (φ), dar cu amplitudini diferite:

$$x = A_1 cos(\omega t - \varphi); \tag{1.59}$$
$$y = B_1 cos(\omega t - \varphi). \tag{1.60}$$

Înlocuind aceste soluţii în ecuaţiile diferenţiale ale mişcării celor doi oscilatori, rezultă:

$$(\omega^2 - a_{11})x - a_{12}y = 0; \tag{1.61}$$
$$-a_{21}x + (\omega^2 - a_{22})y = 0. \tag{1.62}$$

Raportul amplitudinilor de oscilaţie ale celor două corpuri într-un mod dat, determină *configuraţia modului*:

$$\frac{x}{y} = \frac{a_{12}}{\omega^2 - a_{11}} = \frac{\omega^2 - a_{22}}{a_{21}}. \tag{1.63}$$

Sistemul format din ecuaţiile (1.61) şi (1.62) este compatibil dacă are determinantul nul:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \omega^2 - a_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{1.64}$$

Această condiţie conduce la ecuaţia bipătrată:

$$\omega^4 - (a_{11} + a_{22})\omega^2 + a_{12}a_{21} = 0, \tag{1.65}$$

care admite două soluţii pentru ω^2, caracteristice pentru cele două moduri normale.

Configuraţia (forma) modurilor se obţine înlocuind valorile ω_1^2, ω_2^2 în (1.63):

$$\left(\frac{x}{y}\right)_{mod1} = \frac{a_{12}}{\omega_1^2 - a_{11}} = \frac{\omega_1^2 - a_{22}}{a_{21}} = \left(\frac{A_1}{B_1}\right)_{mod1}; \tag{1.66}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)_{mod2} = \frac{a_{12}}{\omega_2^2 - a_{11}} = \frac{\omega_2^2 - a_{22}}{a_{21}} = \left(\frac{A_2}{B_2}\right)_{mod2}. \tag{1.67}$$

Soluţiile generale pentru fiecare oscilator vor fi superpoziţii ale contribuţiilor date de cele două moduri normale:

$$x(t) = x_{mod1}(t) + x_{mod2}(t) \tag{1.68}$$

$$= A_1 cos(\omega_1 t - \varphi_1) + A_2 cos(\omega_2 t - \varphi_2); \tag{1.69}$$

$$y(t) = y_{mod1}(t) + y_{mod2}(t) \tag{1.70}$$

$$= B_1 cos(\omega_1 t - \varphi_1) + B_2 cos(\omega_2 t - \varphi_2). \tag{1.71}$$

Constantele A_1, A_2, B_1, B_2, φ_1, φ_2 se determină din condiţiile iniţiale (patru relaţii) şi din cele două relaţii ce determină configuraţia modurilor.

1.2.3 Oscilatori cuplaţi diferiţi

Să analizăm ce se întâmplă dacă masele celor două corpuri cuplate nu mai sunt identice. Să alegem, de exemplu, cazul $m_2 = 2m_1$. Ecuaţiile diferenţiale ale mişcării, după simplificare prin m, sunt:

$$\ddot{x}_1 = -2\frac{k}{m}x_1 - \frac{k}{m}x_2; \tag{1.72}$$

$$2\ddot{x}_2 = -2\frac{k}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1. \tag{1.73}$$

Presupunem că există un mod de vibraţie în care ambele corpuri oscilează cu aceeaşi frecvenţă şi constantă de fază, dar cu amplitudini diferite. Urmărind procedura generală de determinare sistematică a modurilor, se obţine un sistem cu soluţii nebanale, doar pentru determinantul nul:

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + 2\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -2\omega^2 + 2\frac{k}{m} \end{vmatrix} = 0. \tag{1.74}$$

Ca urmare, rădăcinile ecuaţiei (numită şi *ecuaţie seculară*):

$$2\omega^4 - 6\omega^2 \frac{k}{m} + 3\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \tag{1.75}$$

sunt:

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}\frac{3+\sqrt{3}}{2}; \tag{1.76}$$

$$\omega_2^2 = \frac{k}{m}\frac{3-\sqrt{3}}{2}. \tag{1.77}$$

Înlocuind valorile găsite pentru pulsaţiile celor două moduri, se găsesc configuraţiile:

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{mod1} = \frac{\sqrt{3}+1}{-1}; \tag{1.78}$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)_{mod2} = \frac{\sqrt{3}-1}{1}. \tag{1.79}$$

Deci:

$$x_1 = -(\sqrt{3}+1)B_1\cos(\omega_1 t - \varphi_1) + (\sqrt{3}-1)B_2\cos(\omega_2 t - \varphi_2); \tag{1.80}$$

$$x_2 = B_1\cos(\omega_1 t - \varphi_1) + B_2\cos(\omega_2 t - \varphi_2). \tag{1.81}$$

1.3 Compunerea oscilaţiilor paralele de frecvenţe diferite

După cum s-a demonstrat anterior, mişcarea fiecărui corp al sistemului din Fig.1.6 este rezultatul suprapunerii a două oscilaţii paralele de frecvenţe diferite.

Să considerăm în cele ce urmează, pentru simplificarea calculelor matematice, că fazele iniţiale sunt nule ($\varphi_+ = \varphi_- = 0$) iar amplitudinile sunt egale ($A_+ = A_- = A$). În mod evident, o astfel de alegere nu schimbă cu nimic generalitatea problemei, de vreme ce valorile constantelor nu influenţează evoluţia în timp.

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos\omega_1 t + A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cos\omega_2 t. \tag{1.82}$$

Folosind relaţiile trigonometrice:

$$\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t = \frac{1}{2}\cos\frac{(\omega_1-\omega_2)\,t}{2}\cos\frac{(\omega_1+\omega_2)\,t}{2}, \tag{1.83}$$

$$\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t = \frac{1}{2}\sin\frac{(\omega_1-\omega_2)\,t}{2}\cos\frac{(\omega_1+\omega_2)\,t}{2}, \tag{1.84}$$

găsim:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{mod\,1}(t) \\ A_{mod\,2}(t) \end{pmatrix}\cos\omega_m t, \tag{1.85}$$

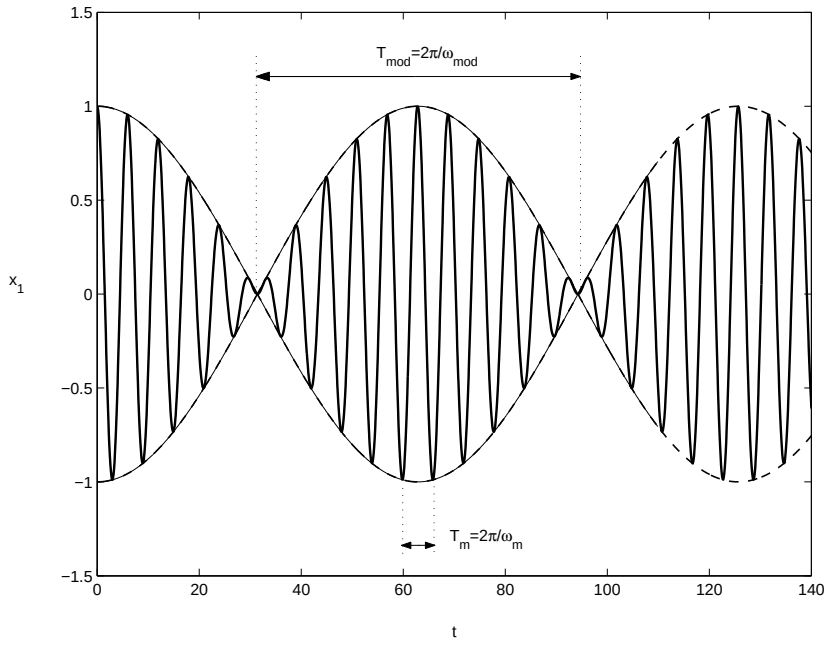

Figura 1.9: Reprezentare grafică a ecuaţiei de mişcare a oscilatorului 1.

unde:

$$A_{mod\,1}(t) = \frac{1}{2}A\cos\omega_{mod}t, \tag{1.86}$$

$$A_{mod\,2}(t) = \frac{1}{2}A\sin\omega_{mod}t \tag{1.87}$$

sunt amplitudinile, modulate cu frecvenţa:

$$\omega_{mod} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}. \tag{1.88}$$

Aşadar, în urma compunerii a două oscilaţii paralele, se obţine o nouă oscilaţie, cu frecvenţa mult mai mare, ω_m:

$$\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tag{1.89}$$

şi cu amplitudinea lent variabilă în timp, cu frecvenţa $\omega_{mod}/2\pi$.

Interpretarea fenomenologică a modulării amplitudinii rezultă uşor dacă analizăm modul cum se modifică în timp energiile totale ale celor doi oscilatori. Pentru calculul energiilor totale pentru fiecare oscilator, (E_i, $i = 1, 2$), vom considera că amplitudinile variază lent în timp, astfel încât să putem folosi rezultatul găsit pentru energia totală a oscilatorului liniar armonic:

$$E_i = \frac{1}{2}k_m A_{mod\,i}(t). \tag{1.90}$$

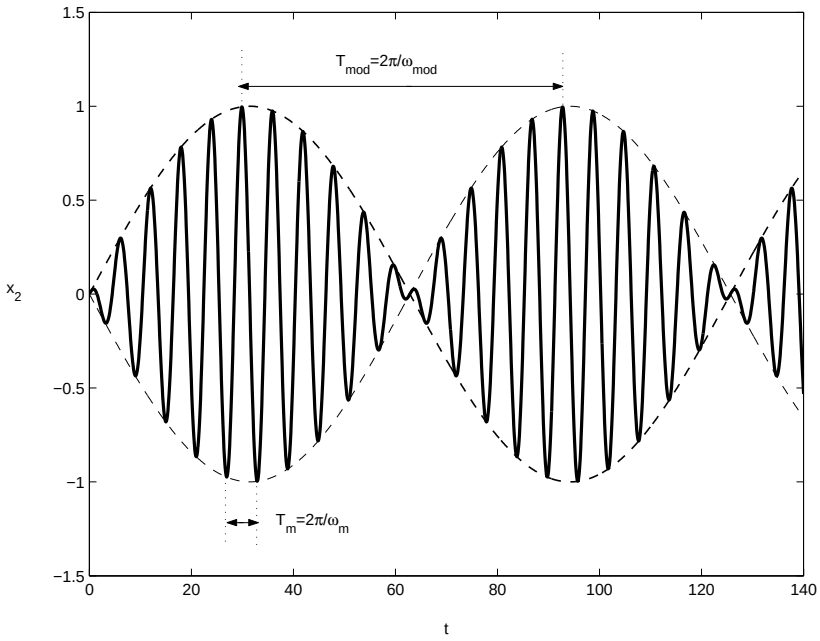

Figura 1.10: Reprezentare grafică a ecuaţiei de mişcare a oscilatorului 2.

Particularizând pentru situaţia corpurilor care oscilează rapid ($k_m = m\omega_m^2$) cu amplitudini lent variabile în timp ($A_{mod}(t)$) găsim:

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} m\omega_m^2 A^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \omega_m t \\ \sin^2 \omega_m t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} E \begin{pmatrix} 1 - \cos \omega_b t \\ 1 - \sin \omega_b t \end{pmatrix}. \tag{1.91}$$

S-au folosit aici relaţiile cunoscute în trigonometrie:

$$2\cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta; \tag{1.92}$$

$$2\sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta. \tag{1.93}$$

Energia totală a sistemului de oscilatori:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2} m\omega_m^2 A^2 = const. \tag{1.94}$$

este o constantă a mişcării. Mărimea $\omega_b = \omega_1 - \omega_2$ se numeşte *frecvenţa bătăilor*.

Analizând reprezentarea din Fig.1.11 se constată că energia se transmite în timpul mişcarii, de la un oscilator la altul, cu o frecvenţă egală cu dublul frecvenţei de modulaţie a amplitudinii. Energia medie a fiecarui oscilator este jumătate din energia totală înmagazinată în fiecare oscilator.

Transmiterea periodică a energiei între doi oscilatori cuplaţi şi efectul rezultant de modulare al amplitudinii de vibraţie a fiecărui oscilator se numeşte fenomen de bătăi.

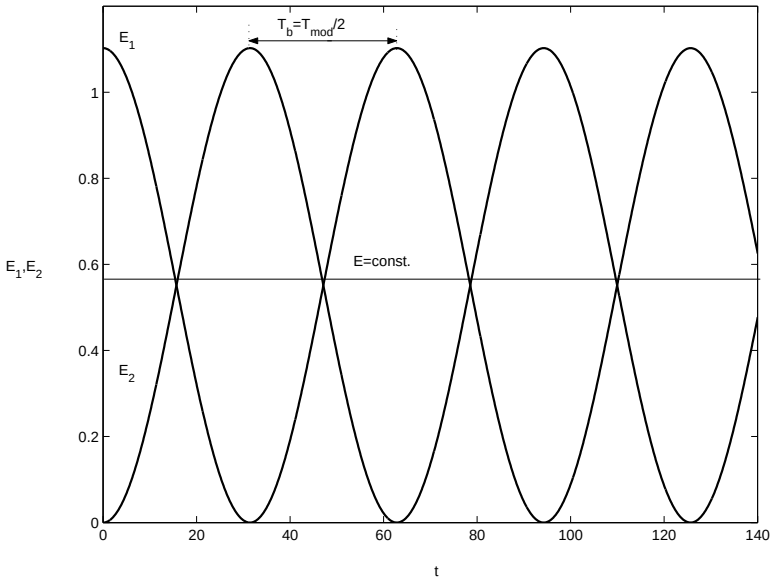

Figura 1.11: Reprezentarea în timp a energiei celor doi oscilatori.

1.4 Compunerea oscilaţiilor paralele de aceeaşi frecvenţă

Să analizăm acum care este mişcarea finală a unui corp supus la două oscilaţii simultane efectuate după aceeaşi direcţie şi având aceeaşi frecvenţă:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1); \tag{1.95}$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t - \varphi_2). \tag{1.96}$$

Considerăm că amplitudinile şi fazele iniţiale sunt diferite.

Rezultatul compunerii celor două oscilaţii paralele se poate găsi cu ajutorul reprezentării fazoriale. Oscilaţia finală este una armonică, de aceeaşi frecvenţă, amplitudinea şi faza iniţială fiind determinate din relaţiile:

$$x = A_R \cos(\omega t - \varphi_R); \tag{1.97}$$
$$A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}\ ; \tag{1.98}$$
$$\varphi_R = arctg\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}. \tag{1.99}$$

Generalizând pentru cazul suprapunerii a n oscilaţii paralele de aceeaşi frecvenţă se obţine:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \cos(\omega t - \varphi_i) = A_R \cos(\omega t - \varphi_R), \tag{1.100}$$

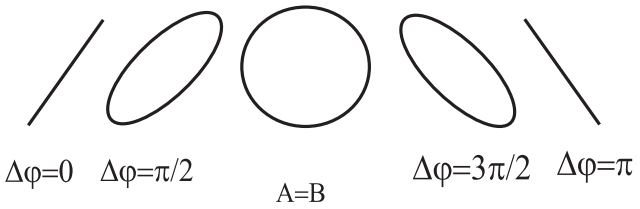

Figura 1.12: Traiectoria punctului material ce execută simultan două oscilaţii perpendiculare, de aceeaşi frecvenţă, defazate cu un unghi $\Delta\varphi$

unde:

$$tg\varphi_R = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \sin\varphi_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i \cos\varphi_i}; \tag{1.101}$$

$$A_R^2 = \sum_{i=1}^{n} A_i^2 + 2\sum_{j>i}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_i A_j \cos(\varphi_i - \varphi_j). \tag{1.102}$$

1.5 Compunerea oscilaţiilor armonice perpendiculare

Să analizăm ce se întâmplă dacă un punct material este supus acţiunii a două oscilaţii armonice ce acţionează pe direcţii perpendiculare:

$$x = A\cos(\omega_1 t - \varphi_1); \tag{1.103}$$

$$y = B\cos(\omega_2 t - \varphi_2). \tag{1.104}$$

Să considerăm, pentru început, că aceste oscilaţii au aceeaşi frecvenţă ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$) şi că $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \Delta\varphi$. Folosind relaţiile trigonometrice:

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \tag{1.105}$$

şi

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1, \tag{1.106}$$

după eliminarea timpului, se găseşte:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi. \tag{1.107}$$

Ecuaţia (1.107) reprezintă *ecuaţia traiectoriei oscilatorului bi-dimensional*. Reprezentarea grafică a acestei ecuaţii este o elipsă cu axele de simetrie înclinate faţă de direcţiile oscilaţiilor. În funcţie de valoarea defazajului $\Delta\varphi$, se pot întâlni următoarele situaţii:

- 1. $\Delta\varphi$ =0, sau π, elipsa degenerează într-o dreaptă:

$$y = \pm\frac{B}{A}x. \tag{1.108}$$

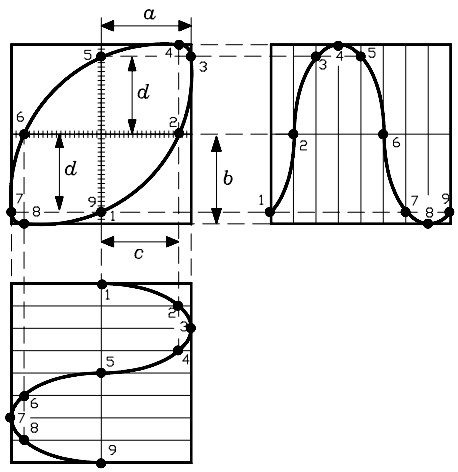

Figura 1.13: Figură Lissajou, rezultată din compunerea a două oscilaţii perpendiculare defazate cu un unghi cuprins între 0 şi $\pi/2$.

- 2. $\Delta\varphi{=}\pi/2$ sau $3\pi/2$, traiectoria este o elipsă cu axele de simetrie pe direcţiile celor două oscilaţii:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \tag{1.109}$$

Dacă în plus $A = B$, atunci elipsa devine un cerc. Aceste situaţii sunt reprezentate în Fig.1.12.

În practică, compunerea oscilaţiilor perpendiculare se foloseşte ca metodă de determinare a defazajului. De menţionat că discuţia anterioară este valabilă nu numai pentru compunerea unor oscilaţii mecanice, ci şi a unora electrice. De exemplu, dacă vom aplica la intrările X şi Y ale unui osciloscop catodic două tensiuni alternative descrise de ecuaţiile:

$$u_x = U_x \sin \omega t; \tag{1.110}$$

$$u_y = U_y \cos(\omega t \pm \varphi). \tag{1.111}$$

din compunerea acestor două oscilaţii va rezulta o mişcare care urmează o traiectorie eliptică (Fig.1.13) vizibilă pe ecran. Valoarea instantanee a oscilaţiei reprezentate pe direcţie orizontală devine zero atunci când:

$$x = 0 \Rightarrow \omega t_n = n\pi,\ n = 0, 1, 2, ... \tag{1.112}$$

Valorile instantanee, la momentele t_n, ale lui u_y sunt:

$$u_y = b \sin(n\pi \pm \varphi) = \pm b \sin \varphi. \tag{1.113}$$

Pe ecran, coordonatele corespunzătoare sunt date de ecuaţia:

$$y(x = 0) = \pm d. \tag{1.114}$$

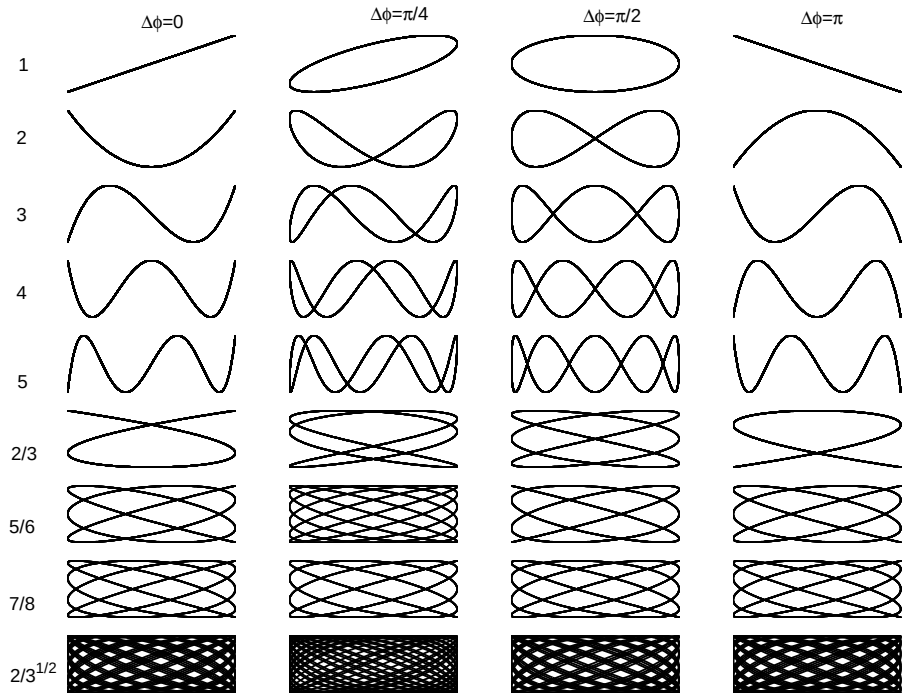

Figura 1.14: Figuri Lissajou obţinute în cazul compunerii oscilaţiilor perpendiculare având pulsaţii ω_x şi ω_y în rapoarte de numere întregi. Pe coloane sunt reprezentate figuri Lissajou corespunzătoare unor diferenţe de fază cuprinse între 0 şi π.

Identificând (1.113) cu (1.114), rezultă:

$$\varphi = \frac{d}{b}. \tag{1.115}$$

Un raţionament analog conduce la rezultatul:

$$\varphi = \frac{c}{a}, \tag{1.116}$$

dacă se consideră că defazajul este inclus în oscilaţia orizontală.

Dacă şi frecvenţele oscilaţiilor care se compun sunt diferite, traiectoriile obţinute[6], au o formă complicată, în funcţie de raportul frecvenţelor şi de diferenţa de fază. Daca raportul frecvenţelor nu este un număr raţional, curba care descrie traiectoria acoperă treptat întreaga arie (vezi Fig.1.14).

1.6 Oscilaţii amortizate

În analiza efectuată până în prezent am neglijat orice fenomen de disipare a energiei. În realitate, oscilaţiile "se sting" după un oarecare timp, ca urmare a disipării (transformării în căldură) energiei înmagazinate iniţial în oscilator.

Să analizăm, în cele ce urmează, mişcarea oscilatorie efectuată în prezenţa frecării. Să

[6]Denumite *figuri Lissajou.*

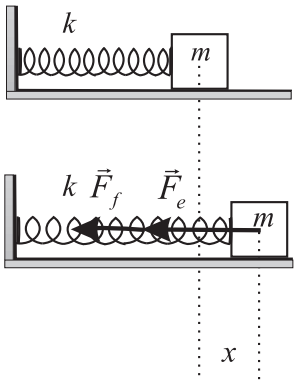

Figura 1.15: Un pendul elastic în regim amortizat (se consideră că frecarea este de tip vâscos)

considerăm că frecarea dintre oscilator şi mediul înconjurător este una de natură vâscoasă, caz în care forţa de frecare este proporţională cu cu viteza.

Ecuaţia principiului II al dinamicii, pentru sistemul reprezentat în Fig.1.15 este:

$$m\ddot{x} = F_f + F_e; \tag{1.117}$$

$$m\ddot{x} = -rx - kx, \tag{1.118}$$

unde r este coeficientul de rezistenţă.

După rearanjarea termenilor şi împărţirea prin m, se obţine:

$$\ddot{x} + 2\delta\ \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{1.119}$$

unde s-au folosit notaţiile:

$$\delta = \frac{r}{2m},\ \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \tag{1.120}$$

δ fiind denumit *coeficientul de amortizare*.

Ecuaţia diferenţială (1.119) este de ordin doi, omogenă şi cu coeficienţi constanţi. Urmând acelaşi algoritm ca şi în cazul oscilaţiilor liniar armonice (alegând soluţii de tip exponenţial), se obţine ecuaţia caracteristică:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0, \tag{1.121}$$

cu soluţiile:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \tag{1.122}$$

Caracterul mişcării este determinat de relaţia dintre efectele forţei de frecare şi forţei elastice, traduse aici prin relaţia dintre δ^2 şi ω_0^2:

1. *Mişcare sub-amortizată* ($\delta < \omega_0$)

   Aceasta apare în situaţia în care efectul forţei de frecare nu este determinant. Amortizarea este slabă, iar mişcarea se numeşte *subamortizată* sau, simplu, *mişcare oscilatorie*

amortizată. Cantitatea de sub radical este, în acest caz, negativă. Soluţia ecuaţiei diferenţiale a mişcării este de forma:

$$x(t) = e^{-\delta t}(A_1 e^{j\omega_1 t} + B_1 e^{-j\omega_1 t}), \tag{1.123}$$

iar pulsaţia oscilaţiilor amortizate, denumită şi *pseudo-pulsaţie*, este:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \tag{1.124}$$

Deoarece deplasarea particulei faţă de poziţia de echilibru este o mărime reală, rezultă că A şi B sunt constante complexe şi legate între ele prin relaţia $A_1^* = B_1$. Sub formă reală, soluţia oscilatorului amortizat este de forma:

$$x(t) = C_1 e^{-\delta t}\cos(\omega t - \phi_1), \tag{1.125}$$

unde:

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 &= C_1 \cos\phi_1, \\ A_1 - B_1 &= jC_1 \sin\phi_1. \end{aligned} \tag{1.126}$$

Constantele A_1 şi B_1, sau C_1 si φ_1 se determină din condiţiile iniţiale.

Din ecuaţia (1.125) se observă că mişcarea este, şi în acest caz, periodică, dar cu o pulsaţie mai mică decât cea a oscilaţiilor libere (care se produc în absenţa frecării). În plus, amplitudinea scade exponenţial în timp, aşa cum rezultă din Fig.1.16.

Mişcarea oscilatorie amortizată se "stinge" cu atât mai repede, cu cât factorul de amortizare, δ, este mai mare. Într-adevăr, într-un interval de timp $\tau = 1/\delta$, numit *constanta de timp* a oscilatorului, amplitudinea oscilaţiilor scade de e ($\cong 2,71$) ori. În intervalul de timp $T = 2\pi/\omega$, amplitudinea ($A(t) = C_1 e^{-\delta t}$) scade de $e^{\delta T}$ ori.

Se poate defini o nouă mărime, numită *decrement logaritmic al amortizării*:

$$D = \ln\frac{a(t)}{a(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau}. \tag{1.127}$$

Ca urmare, în intervalul de timp τ, oscilatorul va executa un număr de oscilaţii, N, cu atât mai mic, cu cât D este mai mare (δ şi T sunt mai mari):

$$N = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\delta T} = \frac{1}{D}. \tag{1.128}$$

Pentru caracterizarea performanţelor unui oscilator se foloseşte cel mai adesea mărimea:

$$Q = \pi N = \frac{\omega}{2\delta}, \tag{1.129}$$

care se numeşte *factor de calitate*. Evident, oscilatorul va fi cu atât mai "*bun*", adică va avea Q mare (oscilează un timp mai îndelungat), cu cât δ este mai mic.

După un interval de timp: $t \cong 5\tau$, amplitudinea oscilaţiilor amortizate scade la 1% din valoarea maximă. De aceea, acest interval de timp se numeste *durata practică* a procesului de "*stingere*" a oscilaţiilor. Pentru a avea şi după acest interval de timp oscilaţii practic sesizabile, este necesar să le întreţinem cu o sursă exterioară.

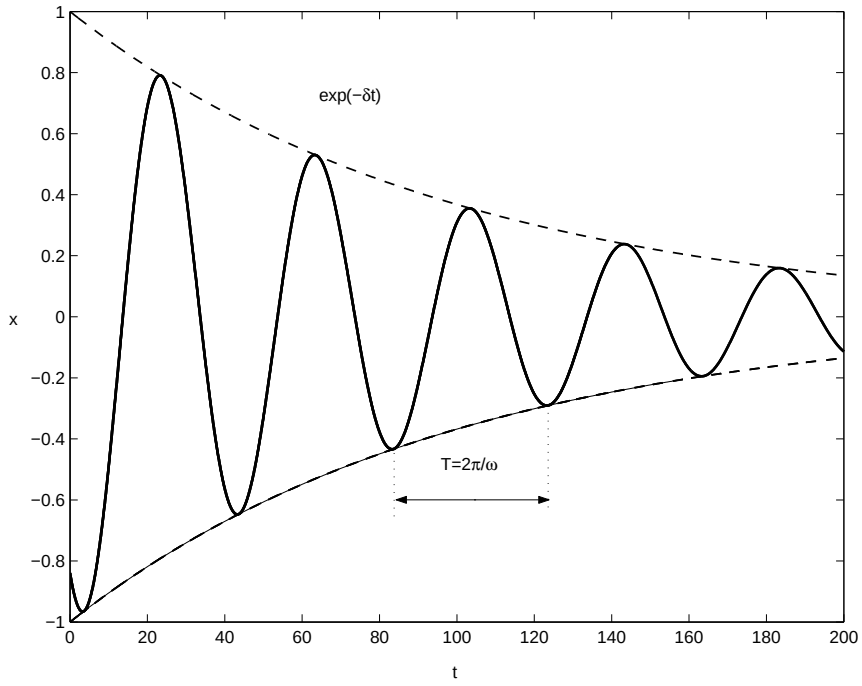

Figura 1.16: Dependenţa de timp a elongaţiei unei mişcări oscilatorii amortizate.

2. *Mişcare supra-amortizată* ($\delta > \omega_0$)

   În această situaţie, cantitatea de sub radical este pozitivă şi, ca urmare, radicalul este un număr real. Mişcarea nu mai este periodică, soluţia fiind exponenţială:

$$x(t) = A_1 e^{-(\delta-\omega_0)t} + B_1 e^{(\delta-\omega_0)t}. \tag{1.130}$$

   O dată cu trecerea timpului, corpul, scos din poziţia de echilibru la momentul $t = 0$, revine la poziţia neperturbată după un interval de timp considerabil. Regimul supra-amortizat este ales, de exemplu, în funcţionarea autovehiculelor, sau maşinilor unelte, când se doreşte eliminarea oscilaţiilor nedorite, ce ar putea apărea în decursul funcţionării. În acest scop, acestea sunt prevăzute cu *amortizoare*.

3. *Mişcare cu amortizare critică* $\delta = \omega_0$

   În acest caz $\delta = \omega_0$, astfel încât ecuaţia de rezolvat este:

$$\ddot{x} + 2\delta\,\dot{x} + \delta^2 x = 0. \tag{1.131}$$

   Deşi cele două soluţii particulare devin egale (întrucât $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$), teoria ecuaţiilor diferenţiale arată că există şi o a doua soluţie, de forma $te^{\lambda t}$. Ca urmare, soluţia ecuaţiei diferenţiale a mişcării este:

$$x(t) = e^{-\delta t}(A_1 + B_1 t). \tag{1.132}$$

   Pentru aceleaşi condiţii iniţiale, în cazul amortizării critice, corpul se va întoarce în poziţia de echilibru în cel mai scurt timp. În funcţie de valorile constantelor A şi B şi de

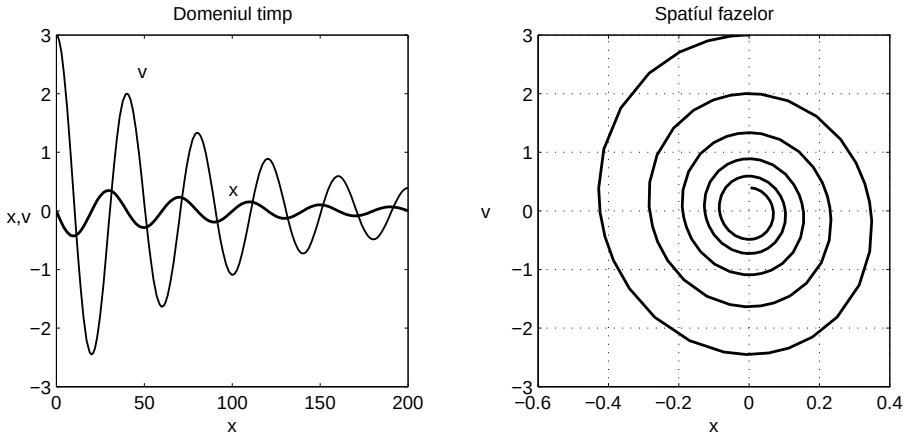

Figura 1.17: Corespondenţa domeniu timp - spaţiul fazelor pentru un oscilator amortizat.

semnul acestora, corpul se apropie asimptotic de poziţia de echilibru sau o traversează o singură dată înainte de a reveni la ea. Regimul amortizat critic este ales în funcţionarea instrumentelor magnetoelectrice, întrucât în acest regim deviaţia echipajului mobil are loc foarte rapid şi nu apar oscilaţii mecanice ale acului indicator în jurul valorii indicate.

1.6.1 Studiul mişcării amortizate în spaţiul fazelor

Deoarece starea finală a mişcării este în vecinătatea poziţiei de echilibru, iar amplitudinea şi viteza oscilatorului amortizat scad exponenţial în timp, traiectoria în spaţiul fazelor va avea forma unei spirale terminată în zona originii. Acest lucru este ilustrat şi în Fig.1.17.

1.7 Oscilaţii forţate

Să analizăm în continuare ce se întâmplă dacă acţionăm din exterior cu o forţă care să compenseze pierderile prin frecare. Presupunem că forţa exterioară este periodică, cu amplitudinea F_0 şi frecvenţa Ω, de forma:

$$F = F_0 \cos \Omega t. \tag{1.133}$$

Putem să reprezentăm forţa sub forma complexă:

$$\widehat{F} = F_0 e^{j\,\Omega\,t} \tag{1.134}$$

şi, în final, să luăm în considerare doar valoarea reală a acesteia.

Ecuaţia diferenţială a mişcării pentru sistemul din Fig.1.18 devine în acest caz:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f e^{-j\,\Omega\,t}, \tag{1.135}$$

unde:

$$\delta = \frac{r}{2m},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},\ f = \frac{F_0}{m}. \tag{1.136}$$

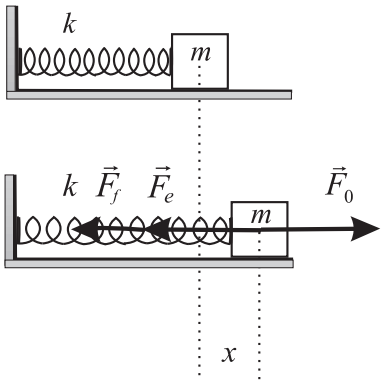

Figura 1.18: Un pendul elastic funcţionînd în regim forţat

Ecuaţia (1.135) este o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul doi, neomogenă (din cauza termenului independent de variabila x, din membrul doi). Soluţia unei astfel de ecuaţii este de forma:

$$x(t) = x_{omog}(t) + x_{part}(t), \tag{1.137}$$

unde x_{omog} este soluţia ecuaţiei omogene (aflată deja!) iar x_{part} este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene, de forma termenului liber:

$$x_{part}(t) = \bar{C}e^{j\Omega t}. \tag{1.138}$$

$\bar{C}$ este, în general, o mărime complexă ce conţine şi informaţiile legate de întârzierea în fază. Alegerea expresiei matematice de o asemenea formă este justificată de comportarea practică a oscilatorului forţat care execută, în final, o mişcare periodică cu pulsaţia forţei exterioare.

Înlocuind soluţia (1.138) în ecuaţia (1.135), se obţine, după simplificarea factorului nenul (exponenţiala):

$$\left(-\Omega^2 - j2\delta\Omega + \omega_0^2\right)\bar{C} = f. \tag{1.139}$$

Amplitudinea complexă este:

$$\bar{C} = \frac{f}{(\omega_0^2 - \Omega^2) - j2\delta\Omega}. \tag{1.140}$$

Soluţia generală a mişcării poate fi scrisă sub forma:

$$x(t) = e^{-\delta t}(Ae^{j\omega_1 t} + Be^{-j\omega_1 t}) + \frac{f}{(\omega_0^2 - \Omega^2) - j2\delta\Omega}e^{j\Omega t}, \tag{1.141}$$

în care constantele A şi B se determină din condiţiile iniţiale.

Deoarece primul termen al ecuaţiei (1.141) (soluţia ecuaţiei omogene) scade exponenţial în timp, el va fi nenul doar un interval de timp limitat, denumit *timp tranzitoriu*. După trecerea

regimului tranzitoriu, mişcarea intră într-un *regim permanent* de oscilaţie, iar legea de mişcare este dată doar de soluţia particulară $x(t) = x_{part}(t)$:

$$x(t) = \frac{f}{(\omega_0^2 - \Omega^2) - j2\delta\Omega} e^{j\Omega t}. \tag{1.142}$$

Înmulţind (1.140) cu complexul conjugat al lui $\bar{C}$, se obţin partea reală şi cea complexă a amplitudinii de oscilaţie:

$$\bar{C} = f\left[\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2} + j\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}\right] = Ce^{j\Phi}. \tag{1.143}$$

Ca urmare, modulul amplitudinii complexe este:

$$C = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}, \tag{1.144}$$

iar faza acesteia:

$$tg\Phi = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \tag{1.145}$$

Soluţia mişcării este partea reală a expresiei complexe:

$$x(t) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} e^{j(\Omega t - arctg\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2})} \tag{1.146}$$

adică:

$$x(t) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} \cos(\Omega t - arctg\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}). \tag{1.147}$$

1.7.1 Fenomenul de rezonanţă

Dependenţa amplitudinii de frecvenţa forţei exterioare este neliniară, prezentând un maxim pentru $\Omega = \Omega_r$. Acest maxim se găseşte din condiţiile:

$$\frac{dC}{d\Omega} = 0,\ \frac{d^2C}{dC^2} < 0, \tag{1.148}$$

adică:

$$-\frac{f}{2}\left[(\omega_0^2 - \Omega_r^2)^2 + (2\delta\Omega_r)^2\right]^{-3/2}\left[2\left(\omega_0^2 - \omega_r^2\right)(-2\Omega_r) + (2\delta\Omega_r)(2\delta)\right] = 0. \tag{1.149}$$

Aşadar, rezonanţa amplitudinii apare atunci când pulsaţia forţei exterioare are valoarea:

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \tag{1.150}$$

La rezonanţă, amplitudinea oscilaţiilor forţate este:

$$C_{\max} = \frac{f}{2\delta\Omega_r}. \tag{1.151}$$

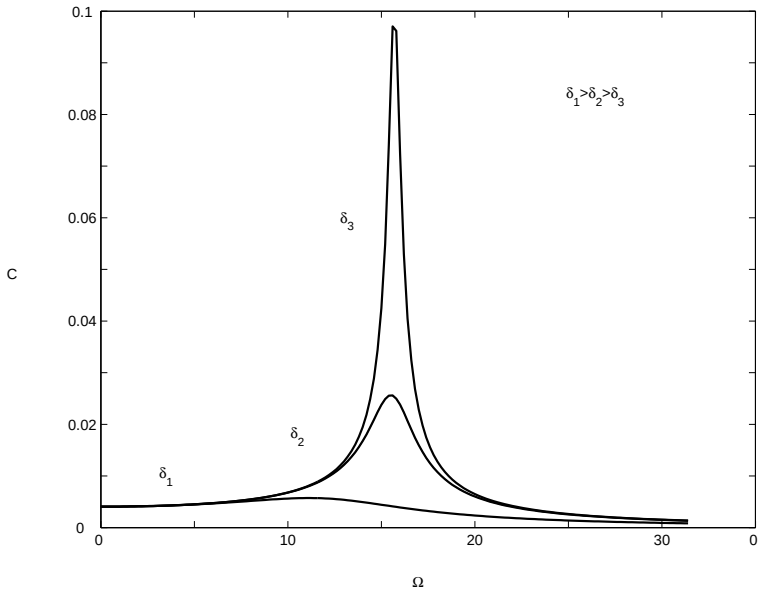

Figura 1.19: Curbe de rezonanţă pentru trei valori diferite ale coeficientului de amortizare ($\delta_1 > \delta_2 > \delta_3$).

Constatăm că, în condiţii de amortizare slabă, pulsaţia Ω_r tinde spre valoarea pulsaţiei proprii a oscilatorului, ω_0. Odată cu scăderea amortizării, amplitudinea maximă de rezonanţă creşte asimptotic spre infinit.

Fenomenul de creştere a amplitudinii oscilaţiilor forţate la o valoare maximă, atunci când pulsaţia forţei exterioare are valoarea Ω_r se numeşte rezonanţă a amplitudinii.

În Fig.1.19 este ilustrat modul în care se modifică curba de rezonanţă pentru trei valori ale coeficientului de amortizare ($\delta_1 > \delta_2 > \delta_3$).

Mărimea notată $\alpha = \frac{C}{C_{max}}$ se numeşte *amplitudine normată*. Pentru amortizări mici ($\delta < \omega_0$) şi pulsaţii apropiate de pulsaţia de rezonanţă ($\Omega \cong \omega_r \cong \omega_0$), se găseşte că amplitudinea normată are valoarea:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega_0}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}, \tag{1.152}$$

unde Q a fost definit de relaţia (1.129).

De remarcat că lărgimea curbei de rezonanţă creşte, prin creşterea lui δ. În plus, amplitudinea la rezonanţă scade, odată cu creşterea coeficientului de amortizare, δ, conform relaţiei (1.150). Acest lucru rezultă şi din Fig.1.20, care reprezintă o imagine tridimensională a dependenţei simultane a amplitudinii de rezonanţă de variabilele Ω şi δ, în domeniul de valori ale lui Ω din apropierea rezonanţei. Ar trebui, conform rezultatelor găsite mai sus, să putem observa că forma curbelor de egală amplitudine, în orice plan $\alpha = constant$, este asimetrică. Acest lucru este simplu de observat, mai ales în planul $(\Omega - \delta)$, acolo unde curbele echi-amplitudine se proiectează în adevărata lor formă şi mărime[7].

[7]Această asimetrie trebuie observată luând ca referinţă dreapta $\Omega = \Omega_r (= 10$, în Fig. (1.20)) din planul

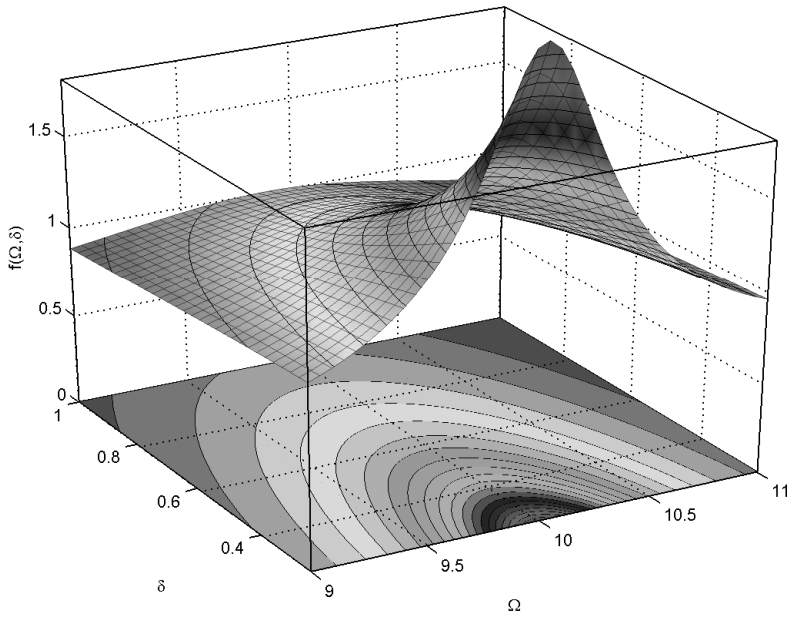

Figura 1.20: O imagine tridimensională a dependenţei amplitudinii oscilaţiilor forţate de Ω şi δ, în vecinătatea rezonanţei amplitudinii.

Scăderea lui α la valoarea $\frac{1}{\sqrt{2}}$ are loc pentru pulsaţiile Ω_1 şi Ω_2 (vezi Fig. (1.19)) care satisfac relaţiile:

$$\frac{\omega_0}{\Omega_1} - \frac{\Omega_1}{\omega_0} = +\frac{1}{Q},\ \frac{\omega_0}{\Omega_2} - \frac{\Omega_2}{\omega_0} = -\frac{1}{Q}. \tag{1.153}$$

Intervalul dintre frecvenţele corespunzătoare scăderii amplitudinii la $1/\sqrt{2}$ din valoarea maximă[8] se numeşte *lărgimea curbei de rezonanţă* (B). Deci:

$$B = \Omega_2 - \Omega_1. \tag{1.154}$$

Din relaţiile (1.153), prin adunarea şi scăderea lor, rezultă, în aproximaţia considerată ($\Omega \cong \Omega_r \cong \omega_0$), o formulă de calcul pentru factorul de calitate a oscilatorului forţat:

$$Q = \frac{\omega_0}{B}. \tag{1.155}$$

Comparând cele două expresii găsite pentru factorul de calitate se observă că:

$$B = 2\delta, \tag{1.156}$$

deci lr ărgimea curbei de rezonanţă este egală cu dublul constantei de amortizare.

orizontal ($\Omega - \delta$)

[8]Cu alte cuvinte, scăderea la jumătate a puterii.

1.7.2 Amplitudini absorbtive şi amplitudini elastice

O altă posibilitate de analiză a oscilaţiilor forţate este exprimarea soluţiei mişcării oscilatorii sub forma reprezentată de (1.6). Adică, în loc să exprimăm soluţia mişcării în funcţie de amplitudine şi fază, o exprimăm în funcţie de două amplitudini, A şi B, care reprezintă în mod corespunzător, componenta în fază cu forţa exterioară şi cea defazată cu $\pi/2$.

$$x(t) = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t. \tag{1.157}$$

După efectuarea calculelor rezultă:

$$\begin{aligned} A &= f\frac{\omega_0^2-\Omega^2}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}; \\ B &= f\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}. \end{aligned} \tag{1.158}$$

- Dacă $\Omega^2 << \omega_0^2$, adică frecvenţa forţei exterioare este mult mai mică decât frecvenţa proprie a oscilatorului, atunci primul termen este determinant în răspunsul sistemului (al doilea este neglijabil!). În acest caz, corpul urmăreşte variaţiile forţei exterioare, iar inerţia sa este insesizabilă (nu influenţează mişcarea!).

- Dacă, dimpotrivă $\Omega^2 >> \omega_0^2$ (forţa exterioară variază foarte rapid), atunci primul termen (cel care domină şi în acest caz) este negativ, ceea ce înseamnă un defazaj de fază π al corpului faţă de forţă. Inerţia domină clar răspunsul corpului, care nu mai poate urmări variaţiile rapide impuse din exterior.

- Dacă $\Omega^2 = \omega_0^2$, răspunsul este determinat doar de termenul al doilea[9].

Pentru situaţii intermediare, trebuie luată în considerare contribuţia ambilor termeni. În Fig.1.21 este dată o ilustrare grafică a celor discutate.

Mărimea A se numeşte *amplitudine elastică* iar B - *amplitudine absorbtivă*. Semnificaţia fizică a acestor termeni este mult mai bine evidenţiată dacă se calculează lucrul mecanic efectuat în unitatea de timp (puterea) de către forţa exterioară.

$$P(t) = F(t)\cdot x(t). \tag{1.159}$$

Înlocuind derivata în raport cu timpul a mărimii x din (1.157), după efectuarea înmulţirilor se găseşte:

$$P(t) = -F_0\Omega A\cos\Omega t\sin\Omega t + F_0\Omega B\cos^2\Omega t. \tag{1.160}$$

Mediind valoarea puterii pe un interval egal cu perioada forţei exterioare, obţinem:

$$\overline{P} = \frac{\Omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\Omega} P(t)dt = \frac{1}{2}F_0\Omega B, \tag{1.161}$$

[9] Aceste observaţii se pot obţine în mod riguros prin analiza trecerii la limită.

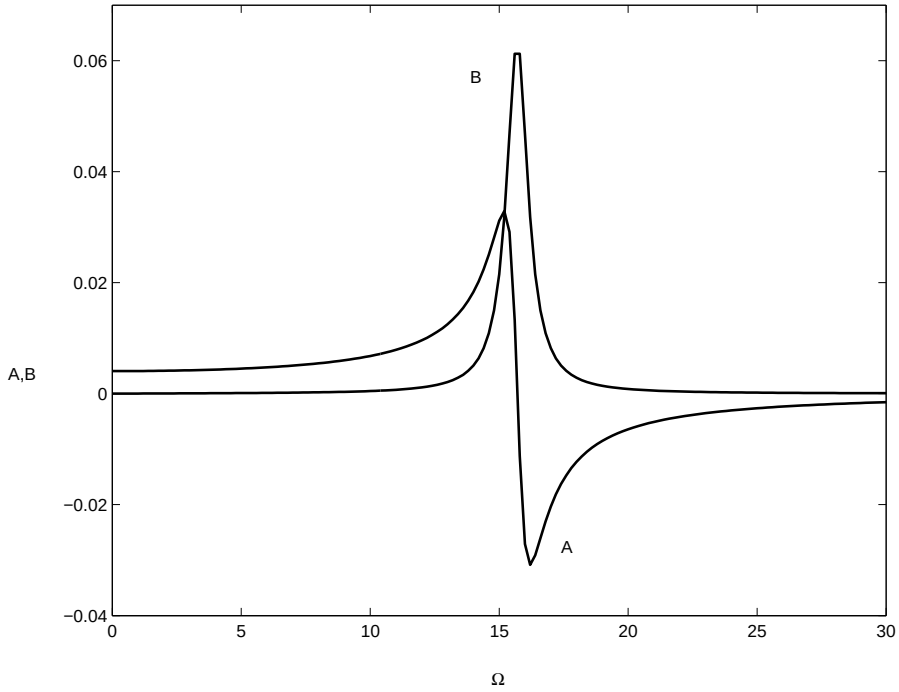

Figura 1.21: Reprezentarea amplitudinii elastice (A) şi absorbtive B.

deoarece:

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \sin\Omega t\cos\Omega t dt = 0, \tag{1.162}$$

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2\Omega t dt = \frac{1}{2}. \tag{1.163}$$

Ca urmare, contribuţia la energia absorbită de sistem este determinată doar de termenul B (cel defazat cu $\pi/2$ faţă de forţa exterioară). Din acest motiv acest termen se numeşte *amplitudine absorbtivă.*

Termenul care îl conţine pe A se anulează în expresia energiei. Energia absorbită de corp într-o semiperioadă este pierdută în cealaltă semiperioadă, totul repetându-se cu perioada forţei exterioare, astfel că media este zero. Datorită asemănării cu modul de distribuire a energiei între corpurile care participă la o ciocnire elastică apare şi denumirea lui A ca *amplitudine elastică.*

1.7.3 Analogia electro-mecanică

Să găsim analogia dintre mărimile mecanice şi cele electrice, din analiza oscilaţiilor electrice ale unui circuit RLC serie (Fig.1.22). Conform legii a doua a lui Kirchhoff:

$$u_L + u_R + u_C = V_i. \tag{1.164}$$

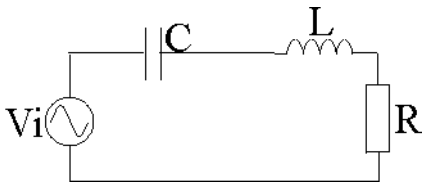

Figura 1.22: Circuit RLC serie.

Considerând că:

$$V_i = U_0 \sin \omega t, \tag{1.165}$$

găsim:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int idt = U_0 \sin \omega t. \tag{1.166}$$

Prin derivare în raport cu timpul şi rearanjarea termenilor se obţine:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{\omega U_0}{L}\cos \omega t. \tag{1.167}$$

Identificarea cu ecuaţia oscilatorului forţat (1.135) conduce la:

$$2\delta = \frac{R}{L},\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC},\ f = \frac{\omega U_0}{L}. \tag{1.168}$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale anterioare este:

$$i(t) = \frac{U_0}{\sqrt{(X_L - X_C)^2 + R^2}}\cos(\omega t - \Phi), \tag{1.169}$$

cu notaţiile:

$$X_L = \omega L; \tag{1.170}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}; \tag{1.171}$$

$$\Phi = arctg\frac{R}{X_L - X_C}. \tag{1.172}$$

Se poate face, deci, un paralelism între mărimile corespunzătoare oscilaţiilor de natură electrică şi a celor de natură mecanică:

Mărimi mecanice	Mărimi electrice
elongatia x	sarcina electrică q
viteza v	intensitatea curentului i
forţa F	tensiunea electrică U
rezistenţa mecanică γ	rezistenţa electrică R
constanta elastică	inversul capacităţii $1/C$

În teoria circuitelor de curent alternativ, se defineşte *impedanţa* prin formula:

$$Z = R + jX. \tag{1.173}$$

Defazajul introdus de un element reactiv (bobină sau condensator) este:

$$\varphi = \arctan(X/R). \tag{1.174}$$

Impedanţa unui rezistor este chiar rezistenţa ohmică a acestuia, R, cea a unui condensator este reactanţa sa capacitivă, $1/j\omega C$, iar a unei inductanţe - reactanţa inductivă, $j\omega L$.

Factorul de calitate al unui circuit electric LR serie este:

$$Q = \omega L/R. \tag{1.175}$$

În cazul unor grupări de elemente, caracteristicile electrice sunt date în tabelul de mai jos:

conexiune serie $U = IZ$	conexiune paralel $U = IZ$
$Z_{tot} = \sum\limits_{(i)} Z_i$	$\frac{1}{Z_{tot}} = \sum\limits_{(i)} \frac{1}{Z_i}$
$L_{tot} = \sum\limits_{(i)} L_i$	$\frac{1}{L_{tot}} = \sum\limits_{(i)} \frac{1}{L_i}$
$\frac{1}{C_{tot}} = \sum\limits_{(i)} \frac{1}{C_i}$	$C_{tot} = \sum\limits_{(i)} C_i$
$Q = \frac{Z_0}{R}$	$Q = \frac{Z_0}{R}$
$Z = R(1 + jQ\delta)$	$Z = \frac{R}{1+jQ\delta}$

unde:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}; \tag{1.176}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{1.177}$$

Puterea cedată în circuit (puterea sursei) este:

$$P(t) = U(t) \cdot I(t), \tag{1.178}$$

iar valoarea sa medie:

$$\langle P \rangle_t = \bar{U}_{\text{ef}}\ \bar{I}_{\text{ef}}\ \cos(\Delta\phi) \tag{1.179}$$

$$= \tfrac{1}{2}\bar{U}\hat{I}\cos(\phi_v - \phi_i) \tag{1.180}$$

$$= \tfrac{1}{2}\bar{I}^2\text{Re}(Z) \tag{1.181}$$

$$= \tfrac{1}{2}\bar{U}^2\text{Re}(1/Z). \tag{1.182}$$

Mărimea $\cos(\Delta\phi)$ reprezintă factorul de putere.

1.8 Oscilaţii forţate - cazul în care forţa exterioară este anarmonică

Să analizăm în continuare ce se întâmplă dacă forţa exterioară nu este sinusoidală, ci variază în timp după o lege oarecare, $F = F(t)$.

Fără a intra aici în detalii, se demonstrează că orice funcţie periodică poate fi scrisă ca o sumă infinită de oscilaţii armonice sinusoidale[10], fiecare cu frecvenţe egale cu multipli întregi ai unei frecvenţe minime, denumită *frecvenţă fundamentală*, conform relaţiei:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t. \tag{1.183}$$

Componentele armonice care apar în sumele din (1.183) se numesc *armonici*.

Coeficientii a_n, b_n se determină prin integrarea pe durata unei perioade a expresiei ce rezultă din înmulţirea lui (1.183) cu $\cos n\omega t$, respectiv $\sin n\omega t$, adică:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt; \tag{1.184}$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t dt; \tag{1.185}$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt. \tag{1.186}$$

Ca urmare, un semnal periodic poate fi exprimat ca o combinaţie liniară de armonici, ale căror frecvenţe sunt multipli întregi ai fundamentalei, adică printr-o *serie Fourier*. Reprezentarea în domeniul frecvenţă a acestei suprapuneri de componente periodice se numeşte *spectrul de amplitudine* al semnalului. Determinarea intensităţii relative a componentelor de diferite frecvenţe poartă denumirea de *analiză spectrală*. În mod evident, se poate folosi şi scrierea complexă:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}; \tag{1.187}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int f(t)e^{-jn\omega t}dt. \tag{1.188}$$

Dacă funcţia f nu este periodică, dezvoltarea Fourier se construieşte ca o extensie a seriei Fourier, pentru cazul în care perioada de bază a funcţiei (T) devine infinit de mare. Spectrul discret al frecvenţelor componentelor devine un spectru continuu de densităţi spectrale.

$$f(t) = \int_0^{\infty} a(\omega)\cos n\omega t d\omega + \int_0^{\infty} b(\omega)\sin n\omega t d\omega, \tag{1.189}$$

[10] Acest mod de reprezentare este datorat lui Joseph Fourier, matematician francez (1768-1830).

în care coeficienţii sunt daţi de:

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t dt; \tag{1.190}$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t dt.$$

sau, sub forma complexă:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)e^{j\omega t}d\omega; \tag{1.191}$$

$$c(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty;} f(t)e^{-j\omega t}dt. \tag{1.192}$$

Astfel, c_n trece în $c(\omega)\delta\omega$, unde $\delta\omega$ este un interval infinitezimal de frecvenţe, iar $c(\omega)$ este amplitudinea dependentă de frecvenţă, numită şi *transformata Fourier*.

Procesul invers, de suprapunere de funcţii armonice cu frecvenţe multipli întregi ai unei frecvenţe fundamentale se numeste *sinteză Fourier*. Acest tip de sinteză joacă un rol important în electronică. Sintetizatorii electronici produc o serie de armonici, care se sumează, reconstituind conţinutul de armonici specific diferitelor instrumente muzicale reale pe care încearcă să le simuleze.

În general, transformata Fourier este o funcţie cu valori complexe. Deoarece în practica experimentală sau în analiza numerică se preferă lucrul cu funcţii reale, se defineşte *spectrul de puteri* al funcţiei ca fiind pătratul modulului transformatei Fourier.

Legea de mişcare a unui oscilator acţionat de o forţă exterioară anarmonică poate fi găsită într-un mod similar cu situaţia examinată anterior, prin aplicarea principiului superpoziţiei. Aceasta înseamnă să analizăm răspunsul oscilatorului la un număr de forţe exterioare armonice independente:

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\cos(n\omega t + \varphi_n); \tag{1.193}$$

$$C_n^2 = a_n^2 + b_n^2; \tag{1.194}$$

$$tg\varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}. \tag{1.195}$$

Ecuaţia de mişcare este de forma:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\cos(n\omega t + \alpha_n), \tag{1.196}$$

cu :

$$D_n = \frac{C_n}{\sqrt{(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + (2\delta n\omega)^2}}; \tag{1.197}$$

$$tg(\alpha_n - \varphi_n) = \frac{2\delta n\omega}{n^2\omega^2 - \omega_0^2}. \tag{1.198}$$

Ori de câte ori frecvenţele $n\omega$ sunt în apropierea frecvenţei oscilaţiilor libere sau chiar coincid cu ω_0, se produce rezonanţa.

1.8.1 Exemplu. Semnal triunghiular

Să descompunem în serie Fourier un semnal periodic triunghiular, de forma:

$$f(t) = \frac{h}{T}t - \frac{h}{2},\ 0 \leq t < T,\ h > 0. \tag{1.199}$$

Calculăm coeficienţii Fourier:

$$a_0 = \frac{h}{T}\int_0^T \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right) dt = 0; \tag{1.200}$$

$$a_n = \frac{2h}{T}\int_0^T \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right) \cos n\omega t dt = 0; \tag{1.201}$$

$$b_n = \frac{2h}{T}\int_0^T \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right) \sin n\omega t dt = (-1)^{n+1}\frac{h}{\pi n}. \tag{1.202}$$

Ca urmare, dezvoltarea Fourier a unei funcţii "*dinte de ferăstrău*" este:

$$f(t) = \frac{h}{\pi}\sin\omega t - \frac{h}{2\pi}\sin 2\omega t + \frac{h}{3\pi}\sin 3\omega t - \ldots. \tag{1.203}$$

În Fig.1.23 sunt reprezentate sumele a 4, 10 şi 1000 de componente armonice pentru $h = 1$ şi $T = 5$. După cum se observă, funcţia $f(t)$ este cu atât mai fidel reconstituită, cu cât se ia în considerare un număr mai mare de termeni în dezvoltarea Fourier.

1.9 Oscilaţii neliniare (anarmonice)

Oscilaţiile unui sistem neliniar, pentru care forţa de revenire nu mai este direct proporţională cu deplasarea, se numesc *oscilaţii neliniare (anarmonice)*.

Să analizăm ce se întâmplă dacă luăm în calcul termeni de ordin superior în expresia forţei elastice. Considerăm că expresia forţei este de forma:

$$F_e = -\left(1 + ax^2\right) kx. \tag{1.204}$$

Ne vom restrânge analiza doar la cazul micilor neliniarităţi ($ax^2 << 1$), când avem de rezolvat ecuaţia:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \beta x^3, \tag{1.205}$$

unde:

$$k = m\omega_0^2,\ \beta = \frac{ak}{m}. \tag{1.206}$$

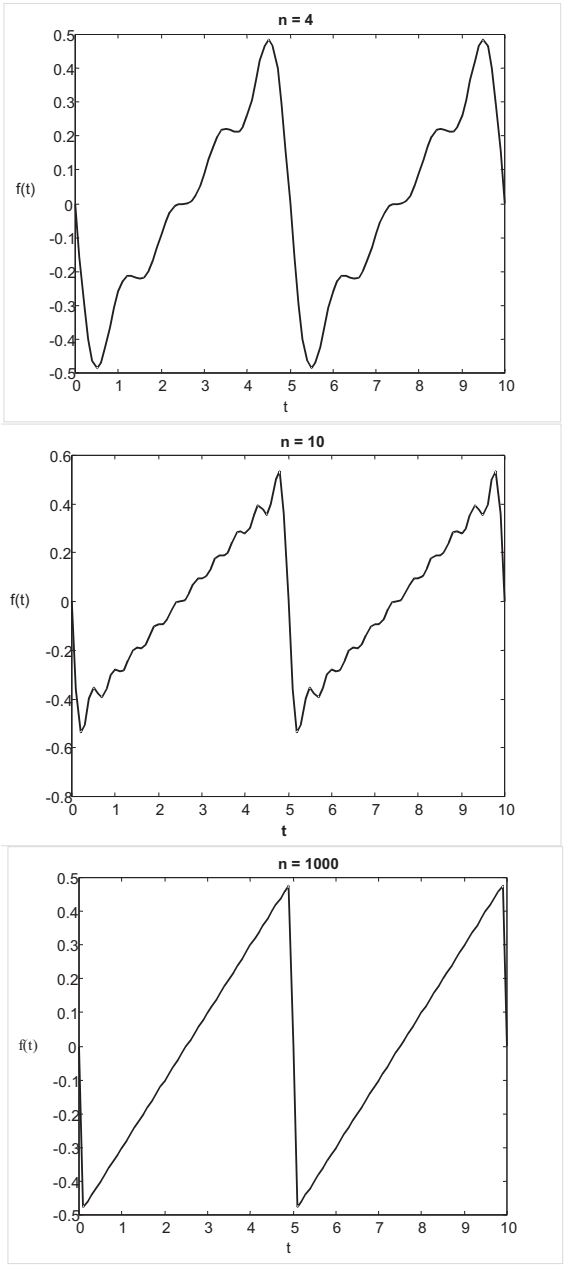

Figura 1.23: Suma a 4,10 şi 1000 componente armonice pentru $h = 1$ şi $T = 5$.

Deoarece mişcarea este periodică şi limitată, căutăm soluţia în termenii unei dezvoltări Fourier. Datorită simetriei faţă de origine a modulului forţei, funcţia este impară, ceea ce înseamnă că media ei pe intervalul ales este nulă. Deci $a_0 = 0$. Aceeaşi observaţie face ca, pentru funcţii impare, toţi coeficienţii b_n din dezvoltarea Fourier sa fie nuli.

Astfel:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t = a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + ..., \tag{1.207}$$

unde ω este noua pulsaţie.

Deoarece pentru $\beta = 0$, soluţia este cunoscută:

$$x = a_1 cos\omega t, \tag{1.208}$$

înseamnă că toţi ceilalţi coeficienţi a_n vor depinde de valoarea lui β, astfel încât $a_n \to 0$ atunci când $\beta \to 0$. Valoarea lor este, în consecinţă, mai mică decât valoarea lui a_1.

Vom găsi, în primă aproximaţie, modul în care se modifică legea de mişcare a oscilatorului în prezenţa micilor neliniarităţi, prin identificarea expresiilor obţinute pentru fiecare membru al ecuaţiei scrise sub forma:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\beta x^3. \tag{1.209}$$

Pentru membrul întâi al ecuaţiei (1.209), introducerea soluţiei (1.207) conduce la:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= -\omega^2 a_1 \cos \omega t - 4\omega^2 a_2 \cos 2\omega t - 9\omega^2 a_3 \cos \omega t - \ldots && (1.210)\\ &\quad +\omega_0^2 a_1 \cos \omega t + \omega_0^2 a_2 \cos 2\omega t + \omega_0^2 a_3 \cos 3\omega t + \ldots && (1.211)\\ &= \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) a_1 \cos \omega t + \left(\omega_0^2 - 4\omega^2\right) a_1 \cos 2\omega t && (1.212)\\ &\quad + \left(\omega_0^2 - 9\omega^2\right) a_1 \cos 3\omega t. \end{aligned}$$

Pentru membrul al doilea al ecuaţiei (1.209), introducerea soluţiei (1.207) conduce, considerând în primă aproximaţie doar primul termen al dezvoltării, la:

$$-\beta x^3 \simeq -\beta a_1^3 \cos^3 \omega t = -\frac{3}{4}\beta a_1^3 \cos \omega t - \frac{1}{4}\beta a_1^3 \cos 3\omega t, \tag{1.213}$$

unde s-a folosit relaţia cunoscută în trigonometrie:

$$\cos 3\omega t = 4\cos^3 \omega t - 3\cos \omega t. \tag{1.214}$$

Identificând termenii corespunzători lui $\cos \omega t$, $\cos 2\omega t$, $\cos 3\omega t$, se găsesc relaţiile:

$$\begin{aligned} \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) a_1 &= -\frac{3}{4}\beta a_1^3; && (1.215)\\ a_2 &= 0\\ \left(\omega_0^2 - 9\omega^2\right) a_3 &= -\frac{1}{4}\beta a_1^3. \end{aligned}$$

Acestea permit aflarea frecvenţei cu care va oscila corpul şi a legii de mişcare, în condiţiile unei forţe de revenire slab neliniare.

Să presupunem acum că noua frecvenţă de oscilaţie nu diferă mult faţă de frecvenţa oscilaţiilor libere armonice, astfel încât să putem scrie:

$$\omega = \omega_0 - \Delta\omega, \tag{1.216}$$

unde $\Delta\omega$ este mult mai mic decât ω_0. Înlocuind mai departe:

$$\omega_0 - \omega = \Delta\omega; \tag{1.217}$$

$$\omega_0 + \omega \approx 2\omega_0, \tag{1.218}$$

găsim deplasarea de frecvenţă:

$$\Delta\omega = -\frac{3\beta a_1^3}{8\omega_0}. \tag{1.219}$$

Relaţia (1.219) indică dependenţa de amplitudine a frecvenţei de oscilaţie. De asemenea, ea indică o creştere sau o scădere în funcţie de semnul lui β (în cazul considerat de noi $\beta > 0$ deci frecvenţa va creşte!).

Aproximând:

$$\omega_0^2 - 9\omega^2 \approx -8\omega_0^2, \tag{1.220}$$

găsim valoarea amplitudinii a_3, de forma:

$$a_3 = \frac{\beta a_1^3}{32\omega_0^2}. \tag{1.221}$$

Ca urmare, în aproximaţia considerată, legea de mişcare a oscilatorului anarmonic sub acţiunea unei forţe de revenire slab neliniare, este:

$$x(t) = a_1 \cos\left(\omega_0 + \frac{3\beta a_1^3}{8\omega_0}\right) t + \frac{\beta a_1^3}{32\omega_0^2} \cos 3\left(\omega_0 + \frac{3\beta a_1^3}{8\omega_0}\right) t. \tag{1.222}$$

Constanta a_1 se determină din condiţiile iniţiale.

În Fig.1.24 este o ilustrare a rezultatului compunerii (linie punctată), dintre prima armonică (linie groasă) şi armonica a treia (linie subţire), pentru cazul unui oscilator anarmonic.

1.9.1 Oscilatorul van der Pol

Pentru cele mai multe sisteme neliniare nu este posibilă găsirea unei soluţii analitice, de aceea ecuaţiile se rezolvă numeric. Unul dintre cele mai simple sisteme dinamice care ajung la un comportament haotic este oscilatorul van der Pol[11], descris de ecuaţia:

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\,\dot{x} + x = 0, \tag{1.223}$$

în care ε este o constantă pozitivă care măsoară gradul de neliniaritate al sistemului.

[11] Ecuaţia (1.223) a fost găsită în 1926 de către van der Pol în legătură cu oscilaţiile neliniare ale curentului dintr-un circuit electric conţinând o triodă.

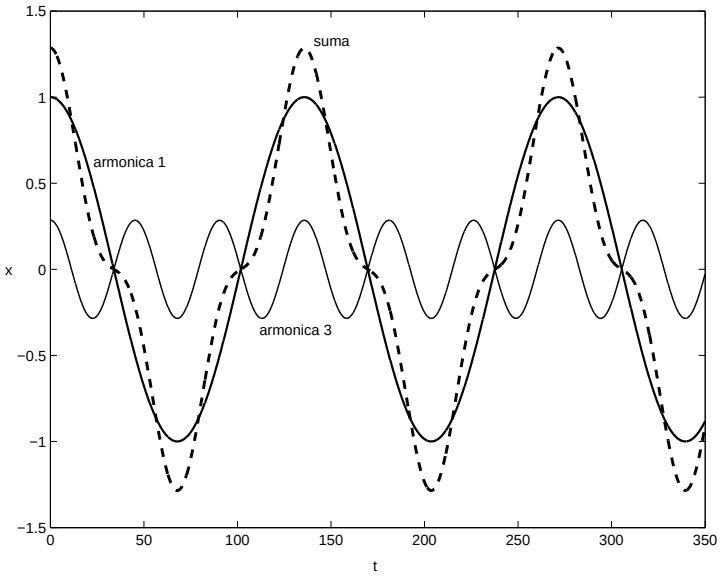

Figura 1.24: Ilustrarea rezultatului compunerii (linie punctată) dintre armonica 1 (linie groasă) şi armonica 3 (linie subţire) pentru un oscilator anarmonic.

Deoarece oscilaţiile sunt neliniare şi soluţiile analitice sunt aproape imposil de găsit, cea mai uşoară analiză este cea din spaţiul fazelor. Acesta este descris de sistemul de ecuaţii:

$$\dot{x} = y; \tag{1.224}$$

$$\dot{y} = -x - \varepsilon(x^2 - 1)y. \tag{1.225}$$

Figura (1.25) ilustrează cazurile $\varepsilon = 0,1; 1; 10$.

Pentru $\varepsilon = 0,1$ sistemul prezintă o amplificare a oscilaţiilor până la o valoare la care acestea se produc periodic şi cu amplitudine constantă. Sistemul tinde spre o stare periodică, reprezentată în spaţiul fazelor de o curbă închisă (*ciclu limită*). Această comportare finală apare indiferent de condiţiile iniţiale.

Pentru valori mai mari ale neliniarităţii, de exemplu cazul $\varepsilon = 1$ ilustrat în Fig.1.25 trasat pentru aceleaşi condiţii iniţiale, caracteristicile periodice ale mişcării se menţin deşi forma ciclului limită se modifică. Deformarea ciclului limită indică o îndepărtare de forma corespunzătoare oscilaţiilor armonice simple şi conduce la apariţia de noi armonici.

Pentru valoarea $\varepsilon = 10$ (Fig.1.25), forma oscilaţiilor este vizibil modificată, acestea având variaţii bruşte (salturi) la fiecare semiperioadă. Astfel de oscilaţii se numesc *oscilaţii de relaxare.*

1.9.2 Oscilaţii neliniare forţate

Să aplicăm, în cele ce urmează, o forţa sinusoidală unui oscilator slab neliniar:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\beta x^3 + f\cos\Omega t. \tag{1.226}$$

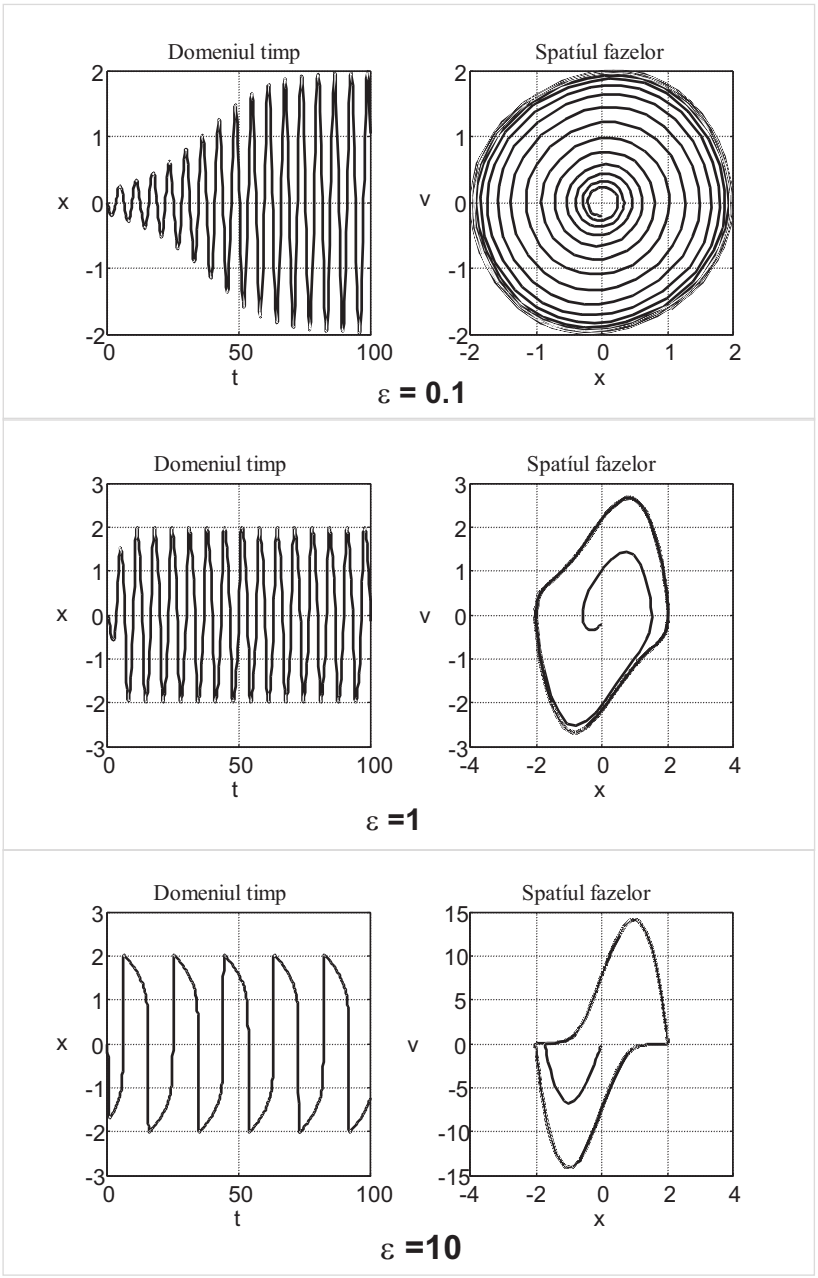

Figura 1.25: Comportarea în domeniul timp şi în spaţiul fazelor a unui oscilator van der Pol cu: $\varepsilon = 0, 1; 1; 10$ şi condiţii iniţiale $(0, -0.2)$.

Urmărind acelaşi formalism de rezolvare ca în paragraful anterior, se aleg drept soluţii termenii unei dezvoltări Fourier[12].

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t. \tag{1.227}$$

După înlocuire şi calcul, prin identificarea coeficienţilor lui $\cos \Omega t$, $\cos 2\Omega t$, $\cos 3\Omega t$, se ajunge la:

$$\begin{aligned} \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) a_1 &= -\frac{3}{4}\beta a_1^3; \\ a_2 &= 0 \\ \left(\omega_0^2 - 9\Omega^2\right) a_3 &= -\frac{1}{4}\beta a_1^3. \end{aligned} \tag{1.228}$$

În cazul în care amplitudinea armonicii a treia este foarte mică ($\omega_0^2 >> \Omega^2$), soluţia mişcării se poate aproxima prin:

$$x(t) = a_1 \cos \Omega t. \tag{1.229}$$

Pe măsură ce frecvenţa forţei exterioare se apropie de frecvenţa oscilaţiilor libere, nu se mai produce o creştere infinită a amplitudinii deoarece a_1 este soluţia unei ecuaţii de grad trei:

$$-a_1^3 + \sigma a_1 + \mu = 0, \tag{1.230}$$

unde:

$$\sigma = -\frac{4\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)}{3\beta}; \tag{1.231}$$

$$\mu = \frac{4F}{3\beta}. \tag{1.232}$$

Soluţiile ecuaţiei de gradul 3 sunt clasificate de condiţia:

$$4\sigma^3 + 27\mu^2 = 0. \tag{1.233}$$

Curbele reprezentate în Fig.1.26 separă două regiuni de coexistenţă în spaţiul parametrilor, a unor soluţii triple (între cele două curbe) şi unice (în afara lor). Punctele de pe curbe corespund existenţei a trei soluţii reale dintre care două sunt confundate.

Pentru o mai bună înţelegere a comportării unei astfel de ecuaţii, să considerăm un exemplu numeric. În Fig.1.26 şi Fig.1.27 sunt date reprezentări ale soluţiilor lui a_1 în funcţie de μ, pentru $\sigma = 1$, şi în mod corespunzator, în funcţie de σ, pentru $\mu = 0.05$.

Forma de S a curbei din Fig.1.27 stânga, indică coexistenţa unor soluţii triple în intervalul de valori $-0,5 < \mu < 0,5$. Regiunile de bistabilitate[13] de pe cele două ramuri stabile se termină în punctele limită μ_1 şi μ_2. Aceste puncte se numesc *puncte de bifurcaţie*. Orice

[12] Termeni cu frecvenţe multipli întreg ai frecvenţei forţei exterioare

[13] Orice schimbare calitativă a comportării unui sistem care conduce la apariţia mai multor soluţii simultane poartă denumirea de bifurcaţie.

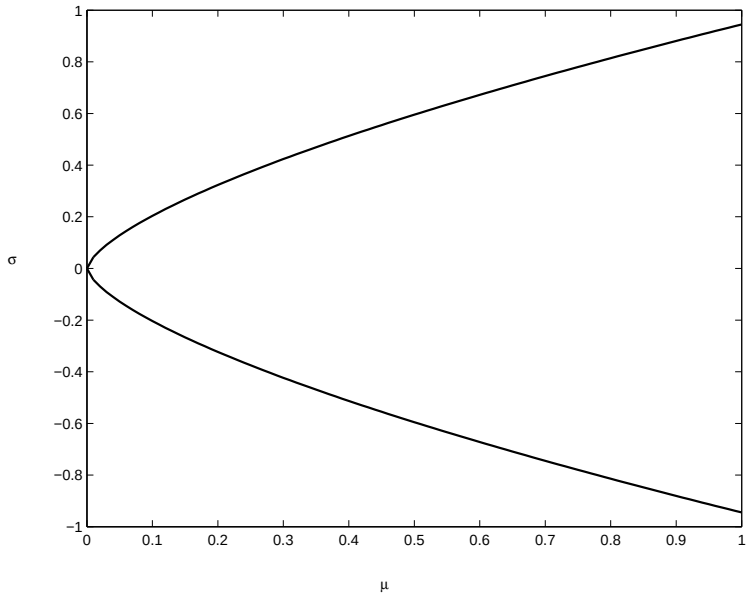

Figura 1.26: Regiuni de coexistenţă în spaţiul parametrilor (σ, μ) ale soluţiilor ecuaţiei de grad 3.

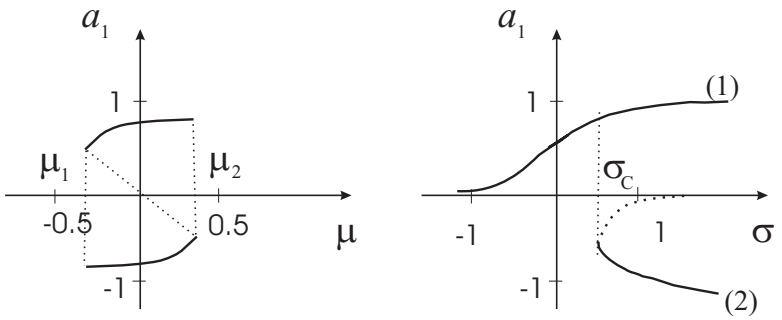

Figura 1.27: Reprezentarea soluţiilor a_1 în funcţie de μ pentru $\sigma = 1$ şi în funcţie de σ pentru un $\mu = 0.05$.

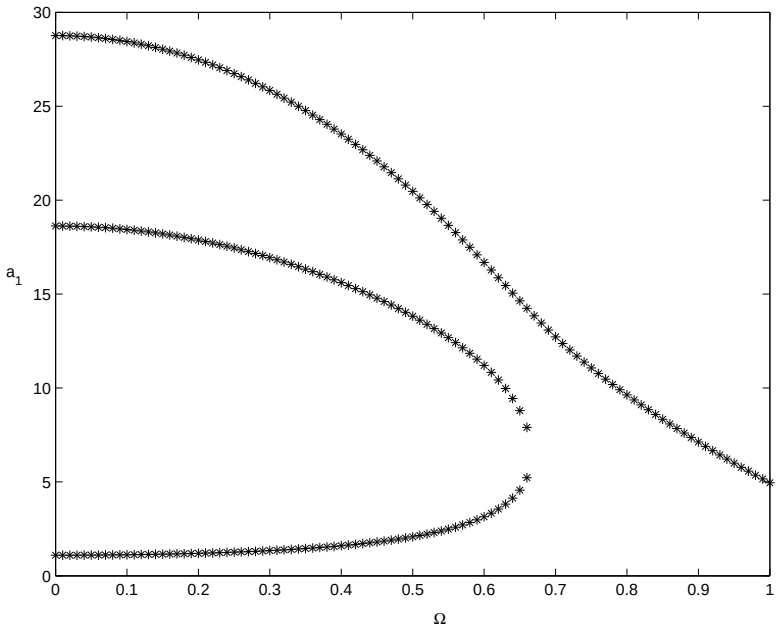

Figura 1.28: Dependenţa amplitudinii a_1 de Ω pentru cazul unui oscilator neliniar forţat. Se observă deformarea curbei de rezonanţă şi apariţia soluţiilor multiple

modificare a lui μ (peste μ_2 sau sub μ_1) este urmată de variaţii bruşte ale funcţiei, fapt care va conduce la o comportare de tip *ciclu de histerezis*.

În partea dreaptă a Fig.1.27 se observă distrugerea comportării anterioare (numită şi *bifurcaţie de tip furcă*). În acest caz, se disting două curbe disjuncte:

- curba (1) definită pentru toate valorile lui $\sigma < \sigma_c$;
- curba (2) definită pentru $\sigma \geq \sigma_c$.

Pentru $\sigma < \sigma_c$ sistemul admite doar o singură soluţie, în timp ce pentru $\sigma \geq \sigma_c$ acelaşi sistem admite un comportament bistabil.

Revenind la situaţia concretă a oscilatorului anarmonic considerat, obţinem reprezentarea din Fig.1.28.

1.9.3 Analiza în spaţiul fazelor a mişcării oscilatorului neliniar forţat

Să analizăm în cele ce urmează mişcarea unui oscilator neliniar în regim forţat, în prezenţa unui termen disipativ (de frecare), descris de cea mai simplă ecuaţie posibilă:

$$\ddot{x} + 2\delta\, \dot{x} + x^3 = F \cos \Omega t. \tag{1.234}$$

Pentru acelaşi set de parametri, un astfel de oscilator neliniar poate oscila în moduri diferite în funcţie de condiţiile iniţiale. Această "*sensibilitate*" la condiţiile iniţiale este una dintre condiţiile ca un oscilator să conducă la un comportament haotic.

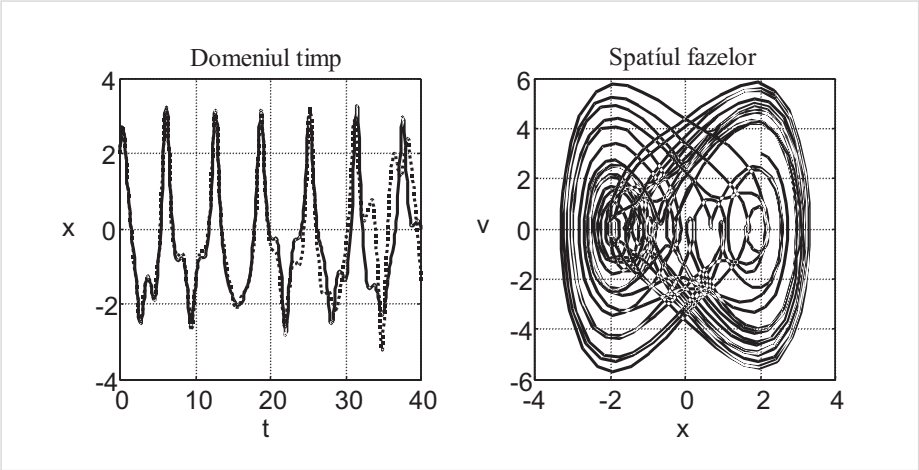

Figura 1.29: Reprezentarea în domeniul timp şi în spaţiul fazelor a unei soluţii numerice a oscilatorului van der Pol forţat pentru două condiţii iniţiale puţin diferite: $(2;3)$ - linia continuă şi $(2;3,1)$ pentru linia punctată.

În Fig.1.29 este reprezentată o soluţie numerică, pentru două condiţii iniţiale puţin diferite: $(2;3)$ - linia continuă şi $(2;3,1)$, pentru linia punctată. Se observă că, pâna la $t = 20$ sistemul oscilează în aceeaşi manieră, după care forma oscilaţiilor se schimbă foarte mult.

Analiza în spaţiul fazelor presupune rezolvarea numerică a sistemului de ecuaţii:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y; \\ \dot{y} &= -2\delta y - x^3 + F\cos\Omega t; \\ \dot{t} &= 1. \end{aligned} \tag{1.235}$$

După cum se observă din reprezentarea în spaţiul fazelor, starea finală a sistemului nu mai poate fi specificată.

1.10 Probleme

1. Ecuaţia de mişcare a unui corp este:

$$x = 2,3sin^2(1,00t - \frac{\pi}{4}), \tag{1.236}$$

unde x este măsurat în cm iar pulsaţia în rad/s.

(a) Determinaţi amplitudinea şi perioada oscilaţiilor;

(b) Aflaţi viteza şi acceleraţia;

(c) Reprezentaţi grafic $x(t)$, $v(t)$;

(d) Desenaţi hodograful vitezei $(v = v(x))$.

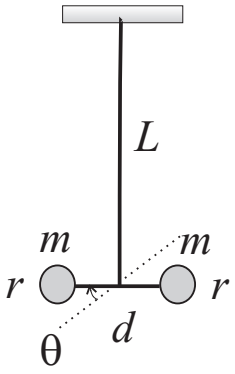

Figura 1.30: Pentru problema 2.

2. În Fig.1.30 este reprezentat un fir de torsiune de lungime L, de care este prinsă o bară de lungime d, la capetele căreia sunt sudate de corpuri de masă m şi rază r. Cunoscând constanta de torsiune a firului, k, determinaţi perioada micilor oscilaţii. Oscilaţiile de torsiune sunt cele care apar atunci când firul elastic este răsucit şi apoi lăsat liber ($M = -k\theta$, k reprezintă constanta de torsiune).

3. Fără a efectua calcule matematice, găsiţi frecvenţele modurilor normale de oscilaţie şi configuraţia lor pentru un sistem format din două pendule matematice de mase egale $m_1 = m_2$, cuplate orizontal printr-un resort cu constanta elastică k.

   Răspuns: $\omega_{21} = g/l$, $(1, 1)$ modul 1 si $\omega_{22} = g/l + 2k/m$, (-1.1) modul 2.

4. Găsiţi frecvenţele modurilor normale de oscilaţie, configuraţia şi legile de mişcare pentru un sistem format din trei corpuri identice de masă m, cuplate prin trei resorturi identice de constantă elastică k, ca în Fig.1.31:

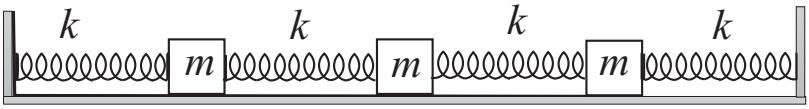

Figura 1.31: Pentru problema 4.

5. Care sunt frecvenţele modurilor normale de oscilaţie şi configuraţia pentru un pendul dublu format din corpurile de masă m_1 şi m_2, aşa cum este reprezentat în Fig.1.32?

6. Găsiţi amplitudinea rezultantă, în cazul suprapunerii oscilaţiilor paralele:

$$\begin{aligned} (a)\ x_1 &= 3\cos(\omega t + \frac{\pi}{4}); \\ x_2 &= 4\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

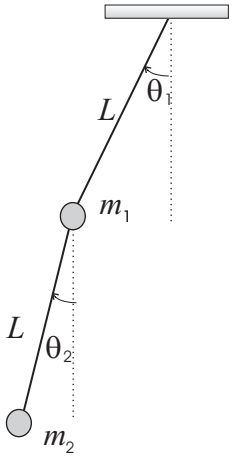

Figura 1.32: Pentru problema 5.

$$\begin{aligned}(b)\ x_1 &= 3\cos(\omega t);\\ x_2 &= 5\cos(\omega t+\frac{\pi}{4});\\ x_3 &= 6\sin(\omega t).\end{aligned}$$

7. Care este traiectoria unei particule care se mişcă sub acţiunea a două oscilaţii simultane:

$$\begin{aligned}(a)\ x_1 &= 2sin2t;\\ x_2 &= 2sin4t.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b)\ x_1 &= 3sin4t;\\ x_2 &= 3cos8t.\end{aligned}$$

8. Rezultanta suprapunerii a două oscilaţii paralele este:

$$x = A\cos 2t\cos 50t, \tag{1.237}$$

unde t este exprimat în secunde. Determinaţi pulsaţiile oscilaţiilor componente şi frecvenţa bătăilor oscilaţiei rezultante.

9. Cât este decrementul logaritmic al unui pendul matematic de lungime l ştiind că timpul de relaxare al oscilaţiilor este τ?

   Răspuns: $D = \frac{2\pi}{\tau}\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{1}{\sqrt{1-g/\tau^2}}$

10. Un corp este agăţat de un resort elastic. El este tras pe o distanţă A faţă de poziţia de echilibru şi apoi este lăsat liber. Ştiind că mişcarea corpului este amortizată, cu factorul de amortizare δ, să se găsească: (a) momentul de timp la care amplitudinea se înjumătăţeşte; (b) fracţiunea din energia iniţială pierdută până la acest moment.

    Răspuns: (a) $t = ln2/\delta$;(b) 3/4.

11. Aflaţi frecvenţa de rezonanţă a unui oscilator, ştiind că amplitudinea oscilaţiilor acestuia este aceeaşi pentru frecvenţele Ω_1 şi Ω_2 ale forţei exterioare.
    Răspuns: $\Omega_r = \sqrt{\frac{1}{2}(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)}$

12. Folosind analogia dintre mărimile electrice şi cele mecanice, găsiţi impedanţa unui circuit RLC paralel si studiaţi condiţiile de apariţie a rezonanţei.

13. Dezvoltaţi în serie Fourier un semnalul dreptunghiular simetric.

Capitolul 2

Propagarea perturbaţiilor mecanice în medii elastice. Unde elastice

2.1 Ecuaţia diferenţială a propagării unei perturbaţii longitudinale printr-un mediu elastic solid

Să considerăm o bară de secţiune transversală S, confecţionată dintr-un material cu proprietăţi elastice, aşezată paralel cu axa Oy a unui sistem de coordonate cartezian . Să pre-

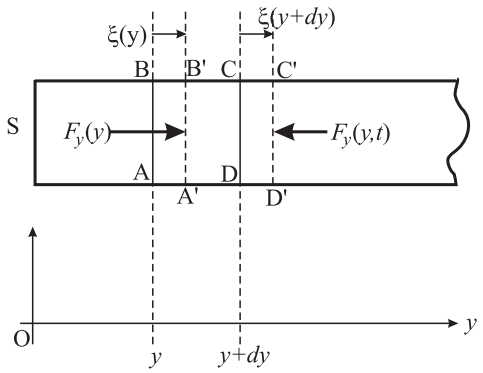

Figura 2.1: Modificarea volumului ABCD al barei elastice în A'B'C'D', ca urmare a unei perturbaţii longitudinale.

supunem că, la momentul $t_0 = 0$ (Fig. 2.1), bara este lovită cu un ciocan care se deplasează de-a lungul direcţiei Oy, în aşa fel încât în regiunea din zona capătului din stânga al său apare o stare de compresiune. La scară microscopică, în urma ciocnirii, în zona din imediata vecinătate a capătului barei, distanţa dintre particulele mediului este mai mică decât în starea neperturbată. Prin intermediul forţelor de interacţiune dintre particulele mediului, această stare *se propagă din aproape în aproape* în sensul pozitiv al axei Oy, astfel încât, la un moment t, zona perturbată ajunge în poziţia figurată prin zona $A'B'C'D'$. În starea neperturbată această zonă ocupase volumul elementar delimitat de $ABCD$, adică $dV = Sdy$. Aşa cum este

reprezentat în Fig. 2.1, elementul de volum $ABCD$ apare acum comprimat, deoarece asupra feţelor sale laterale perpendiculare pe axa Oy acţionează forţele $F_y\,(y)$, respectiv $F_y\,(y+dy)$.

Comprimarea absolută a dimensiunii paralele cu axa Oy a elementului de volum considerat este:

$$\delta\xi = \xi(y+dy) - \xi(y), \tag{2.1}$$

iar comprimarea relativă:

$$\epsilon = \frac{d(\delta\xi)}{dy} = \frac{\xi(y+dy)-\xi(y)}{dy}. \tag{2.2}$$

Dezvoltând în serie Taylor elongaţia $\xi(y+dy)$ şi, propunându-ne să considerăm doar un model simplificat, valabil doar în cazul perturbaţiilor mici, vom reţine din dezvoltarea sus-mentionată doar primii doi termeni din dezvoltare:

$$\xi(y+dy) \approx \xi(y) + \frac{\partial\xi}{\partial y}dy. \tag{2.3}$$

Ţinând cont de ecuaţiile (2.2) şi (2.3) vom putea scrie:

$$\epsilon \simeq \frac{\partial\xi}{\partial y}. \tag{2.4}$$

Pe de altă parte, conform principiului II al dinamicii, aplicat mişcării elementului de masă vom avea:

$$dm\cdot a_y = \delta F_y^{(r)} \Rightarrow \rho S dy \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \delta F_y^{(r)} \tag{2.5}$$

în care $a_y = \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}$, iar

$$\delta F_y^{(r)} = \delta F_y(y+dy) - \delta F_y(y). \tag{2.6}$$

Recurgând şi în cazul forţei $\delta F_y(y+dy)$ la dezvoltarea în serie Taylor, vom putea scrie continuând ecuaţia (2.6):

$$\delta F_y^{(r)} \simeq \left[\delta F_y(y) + \frac{\partial}{\partial y}(\delta F_y)dy\right] - \delta F_y(y), \tag{2.7}$$

adică:

$$\delta F_y^{(r)} \simeq \frac{\partial}{\partial y}(\delta F_y)dy. \tag{2.8}$$

Expresia lui δF_y din ecuaţia anterioară poate fi dedusă din aplicarea legii lui Hooke pentru elementul de volum dV:

$$\sigma = E\epsilon, \tag{2.9}$$

Ţinând cont şi de ecuaţia (2.4), după ce explicităm pe σ şi ϵ, vom găsi:

$$\frac{\delta F_y}{S} = E\frac{\partial \xi}{\partial y} \Rightarrow \delta F_y = ES\frac{\partial \xi}{\partial y}.$$

Înlocuind acest ultim rezultat în ecuaţia (2.8), obţinem:

$$\delta F_y \approx \frac{\partial}{\partial y}\left(ES\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) = ES\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}dy. \tag{2.10}$$

Din ecuaţiile (2.10) şi (2.5) rezultă că:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0, \tag{2.11}$$

În ecuaţia (2.11) raportul E/ρ are semnificaţia dimensională a pătratului unei viteze v_l. Aceasta este viteza de propagare a stării de perturbaţie longitudinală de-a lungul lui Oy:

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{2.12}$$

2.2 Ecuaţia diferenţială a propagării unei perturbaţii transversale printr-un mediu elastic solid

Să considerăm, în continuare, două puncte, P şi Q aflate în planele AB şi CD din acelaşi sistem studiat, reprezentat în Fig. 2.1. Coordonatele celor două puncte sunt şi aici y şi $y+dy$. Să examinăm ce se întâmplă dacă bara este lovită din lateral (perpendicular pe axa Oy) in

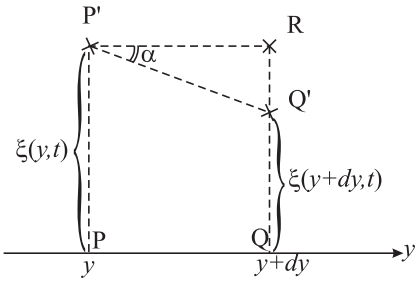

Figura 2.2: Modificarea poziţiei punctelor P şi Q în P' şi Q', ca urmare a prezenţei unei perturbaţii transversale.

zona capătului său din stânga. Notând, din nou, elongaţia unui punct, la un moment dat, t, cu ξ, situaţia celor două puncte la acel moment dat va arăta ca în Fig. 2.2.

Pentru perturbaţii mici unghiul de alunecare α al planului AB ce îl conţine pe P faţă de planul CD care îl conţine pe Q este dat de relaţia:

$$\mathrm{tg}\alpha \approx \alpha \approx \frac{Q'R}{P'R} = \frac{\xi(y+dy,t) - \xi(y,t)}{dy} = \frac{\partial \xi}{\partial y}. \tag{2.13}$$

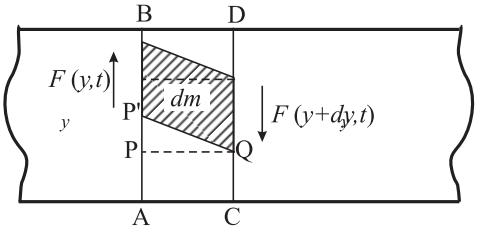

Figura 2.3: Ilustrarea forţelor implicate în deplasarea elementului de masă

Forţele implicate în deplasarea unui element de masă dm, sunt, în acest caz, forţe *de forfecare*, ele fiind perpendiculare pe direcţia de propagare a perturbaţiei. Aşa cum rezultă şi din Fig. 2.3, porţiunea din stânga mediului acţionează cu o forţă $F_z(y,t)$ *spre în sus*, în timp ce porţiunea din dreapta planului CD acţionează asupra lui dm cu o forţă $F_z(y+dy,t)$ îndreptată *în jos*. Scriind, pentru masa dm, reprezentată haşurat în Fig. 2.3 legea a 2-a a dinamicii vom avea o relaţie de tip (2.5):

$$\rho S dy \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \delta F_z^{(r)}, \tag{2.14}$$

unde $\delta F_z^{(r)}$ este dat de o relaţie de tip (2.8). δF_z se determină din legea lui Hooke, corespunzătoare deformaţiei de forfecare:

$$\frac{\delta F_z}{S} = G\alpha, \tag{2.15}$$

în care raportul $\frac{\delta F_z}{S} = \tau$ reprezintă *efortul unitar de forfecare* al materialului, iar G – *modulul de forfecare*.

Aşadar:

$$\rho S dy \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\delta F_z) dy = \frac{\partial}{\partial y}\left(GS\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) dy.$$

Simplificând prin Sdy şi re-aranjând termenii din ecuaţia precedentă, vom obţine:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0, \tag{2.16}$$

adică o relaţie de tip (2.11), în care viteza de propagare a perturbaţiei transversale este acum:

$$v_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \tag{2.17}$$

2.3 Ecuaţia diferenţială a propagării unei perturbaţii longitudinale într-un mediu elastic fluid

Sa considerăm în volumul unui fluid un cilindru de secţiune S, orientat de-a lungul axei Oy (Fig. 2.4). Să delimităm în fluid un element de masă conţinut în volumul elementar $ABCD$. În

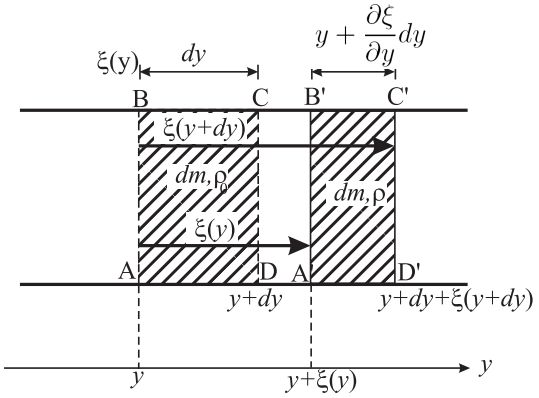

Figura 2.4: Modificarea poziţiei şi dimensiunii elementului de volum $ABCD$ ca urmare a unei perturbaţii longitudinale

starea iniţială neperturbată, densitatea fluidului din interiorul lui dV este ρ_0. În dreapta figurii este reprezentată poziţia elementul de masă, ocupată, ca urmare a perturbaţiei ($A'B'C'D'$). Densitatea în starea perturbată $A'B'C'D'$ este notată cu ρ. Diferenţa de densitate între cele două stări se poate scrie, plecând de la legea conservării masei. Pe de altă parte:

$$\begin{aligned} dm &= \rho_0 S dy, \\ dm &= \rho S\left(dy + \tfrac{\partial\xi}{\partial y}dy\right) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Aşadar, între ρ şi ρ_0 există relaţia:

$$\rho_0 = \rho\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) \Rightarrow \frac{\rho_0}{\rho} = 1+\frac{\partial\xi}{\partial y}$$

Folosind relaţia proporţiilor derivate putem scrie:

$$\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0} = -\frac{\partial\xi}{\partial y} \Rightarrow \frac{\delta\rho}{\rho_0} = -\frac{\partial\xi}{\partial y} \tag{2.19}$$

în care am considerat că $\frac{\partial\xi}{\partial y} \ll 1$ (în cazul perturbaţiilor mici).

Variaţiei $\delta\rho$ a densităţii mediului îi corespunde o variaţie a presiunii în fluid:

$$dp = p - p_0 \simeq \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_0 \delta\rho \approx -\frac{\partial p}{\partial\rho}\rho_0\frac{\partial\xi}{\partial y}. \tag{2.20}$$

Observaţii: Dacă perturbaţia se propagă foarte rapid în fluid, iar conductibilitatea termică a acestuia este redusă, atunci termenul $\frac{\partial p}{\partial\rho}$ din ecuaţia (2.20) trebuie evaluat în condiţiile unui proces adiabatic:

$$dp \approx \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{ad}\rho_0\frac{\partial\xi}{\partial y}. \tag{2.21}$$

Raportul $\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{ad}$ este constant. Această variaţie a asociată unei forţe:

$$dF = +\frac{\partial(Sdp)}{\partial y}dy. \tag{2.22}$$

Aplicând legea a 2-a a dinamicii pentru mişcarea lui dm, rezultă:

$$dm\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = +S\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{ad} dy,$$

sau:

$$\rho_0 S dy\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = +Sdy\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{ad}\rho_0\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}. \tag{2.23}$$

Obţinem, aşadar, ecuaţia diferenţială:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{ad}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = 0, \tag{2.24}$$

sau:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)^{-1}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0, \tag{2.25}$$

în care viteza de propagare a perturbaţiei longitudinale prin fluid este:

$$v = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{ad}} \Rightarrow dp = v^2 d\rho \tag{2.26}$$

Pentru variaţii finite ale lui p şi ρ vom putea scrie:

$$\Delta p = v^2\Delta\rho \Rightarrow \Delta\rho = \frac{1}{v^2}\Delta p. \tag{2.27}$$

Aşadar, variaţiile de densitate în interiorul unui fluid, determinate de propagarea unei perturbaţii longitudinale prin acesta, sunt proporţionale cu variaţia de presiune, constanta de proporţionalitate dintre ele este inversul pătratului vitezei de propagare a perturbaţiei în acel fluid.

De multe ori, raportul $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{ad}$ se exprimă în funcţie de aşa-numitul *coeficient de compresibilitate adiabatică* al fluidului, K_{ad}, definit prin relaţia:

$$K_{ad} = -V\frac{\partial p}{\partial V}. \tag{2.28}$$

Înlocuind $V = \frac{m}{\rho}$ în relaţia anterioară, vom obţine:

$$K_{ad} = -\frac{m}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\left(\frac{m}{\rho}\right)} = \rho\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{ad}, \tag{2.29}$$

astfel încât relaţia (2.26) se poate scrie şi sub forma:

$$v = \sqrt{\frac{K_{ad}}{\rho}}. \tag{2.30}$$

În cazul gazelor, coeficientul K_{ad} are o expresie particulară. Pentru a-l calcula pe K_{ad}, plecăm de la ecuaţia de stare a gazului:

$$pV^{\gamma} = \text{const.} \tag{2.31}$$

unde $\gamma = C_p/C_V$ se numeşte *coeficientul adiabatic al gazului ideal* (coeficientul lui Poisson), C_p şi C_V fiind capacităţile calorice ale gazului la presiune, respectiv volum constant. Logaritmând ecuaţia (2.31):

$$\ln p + \gamma \ln V = \ln(\text{const.}) \tag{2.32}$$

Diferenţiind relaţia anterioară:

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}, \tag{2.33}$$

de unde:

$$K_{ad} = -V \left(\frac{dp}{dV}\right)_{ad} = \gamma p. \tag{2.34}$$

Cu acest din urmă rezultat, putem scrie că viteza undelor longitudinale în gazul ideal este:

$$v_{lg} = \sqrt{\frac{K_{ad}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}, \tag{2.35}$$

în care am folosit ecuaţia de stare a gazului ideal:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT. \tag{2.36}$$

Aşadar, viteza de propagare a unei perturbaţii longitudinale într-un gaz este proporţională cu $T^{1/2}$.

2.4 Ecuaţia diferenţială a propagării perturbaţiilor transversale într-o coardă vibrantă

Să considerăm acum o coardă întinsă între 2 suporţi, astfel încât tensiunea în aceasta să fie T_0. Să presupunem că printr-un procedeu adecvat (ciupire, lovire, frecare cu un arcuş, etc.) am produs într-o regiune din preajma originii, o perturbaţie transversală a corzii şi să examinăm mişcarea unui element de masă dm al său ($dm = \lambda dy$), ca urmare a faptului că perturbaţia iniţială a ajuns şi în zona lui dm (Fig. 2.5).

În starea iniţială (Fig. 2.5), dm este delimitat de punctele A şi B. În starea perturbată dm este delimitat de punctele A' şi B'. Dacă perturbaţiile sunt foarte mici, tensiunea în coarda perturbată are valoarea $T \approx T_0$, însă tensiunile în A şi, respectiv B, fac cu axa unghiurile α şi β (cu $\alpha > \beta$). În plus, unghiurile α şi β sunt atât de mici (din cauza faptului că aici examinăm *micile* perturbaţii ale corzii), încât componentele paralele cu Oy ale lui $\vec{T}_A$ şi $\vec{T}_B$ sunt practic egale, de asemenea, cu T_0. Ele vor da, prin urmare, o rezultantă nulă de-a lungul

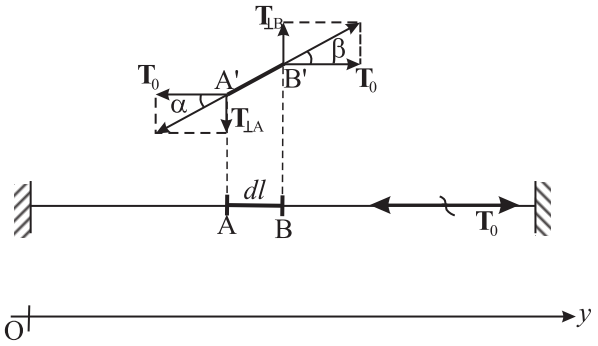

Figura 2.5: Un element de masă $A'B'$, în poziţie perturbată ca urmare a aplicării unei perturbaţii transversale în coardă.

direcţiei Oy deci coarda, in ansamblu, nu va avea o mişcare de-a lungul lui Oy. Întrucât $\alpha > \beta$, componenta rezultantă a tensiunii după direcţia perpendiculară pe Oy va fi îndreptată spre poziţia de echilibru a corzii. Ea are valoarea:

$$F_{rez} = T_{\perp A} - T_{\perp B} = T_0 \sin\alpha - T_0 \sin\beta \approx T_0(\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta), \tag{2.37}$$

întrucât la unghiuri mici:

$$\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha \approx \alpha \text{ (radiani)}.$$

Aşadar:

$$F_{rez} \simeq T_0 \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)_A - \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)_B \right]. \tag{2.38}$$

Recurgând din nou la dezvoltarea în serie a lui $\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)$ şi ţinând cont că, în cazul micilor perturbaţii $\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)$ nu variază foarte rapid între A şi B, rezultă:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)_B \simeq \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)_A + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)_A \right] dy - \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)_A .$$

Relaţia (2.38) devine, în aceste condiţii:

$$F_{rez} \simeq T_0 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right)_A dy. \tag{2.39}$$

Scriind acum legea a 2-a a dinamicii pentru mişcarea lui dm ($dm = \lambda dy$), găsim:

$$\lambda dy \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = T_0 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) dy, \tag{2.40}$$

sau:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{T_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0. \tag{2.41}$$

Aici raportul $\frac{T_0}{\lambda}$ reprezintă pătratul vitezei de propagare a perturbaţiei prin coardă:

$$v_{tc} = \sqrt{\frac{T_0}{\lambda}}. \tag{2.42}$$

Aşadar viteza de propagare a perturbaţiilor transversale într-o coardă este proporţională cu tensiunea în aceasta şi depinde invers proporţional de $\sqrt{\lambda}$.

2.5 Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale de propagare a unei perturbaţii printr-un mediu elastic. Unde elastice

În cele patru tipuri de perturbaţii analizate anterior se obţine aceeaşi ecuaţie de propagare uni-dimensională în spaţiu şi timp:

$$\frac{\partial^2 \xi(y,t)}{\partial y^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t} = 0. \tag{2.43}$$

În cazul unei perturbaţii care se propagă după o direcţie oarecare, pe lângă termenul $\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$ din ecuaţia (2.43) vor apărea şi termenii $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ şi $\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$, astfel că ecuaţia diferenţială (în coordonate carteziene) se va scrie:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t} = 0. \tag{2.44}$$

Primii 3 termeni din ecuaţia precedentă reprezintă *laplaceanul* lui ξ:

$$\Delta\xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}.$$

Cu această precizare, ecuaţia diferenţială a propagării oricărei perturbaţii se poate scrie:

$$\Delta\xi(x,y,z,t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi(x,y,z,t)}{\partial t^2} = 0. \tag{2.45}$$

Soluţia generală a unei astfel de ecuaţii are o expresie sugerată de observaţiile experimentale, care se exprimă sub forma unui produs de două funcţii, dintre care una este de variabilă y, cealaltă – de variabila t.

$$\xi(y,t) = \varphi(y)\psi(t). \tag{2.46}$$

Într-adevăr, observaţiile experimentale arată că funcţia $\psi(t)$ este o exponenţială de forma $e^{i\omega t}$, întrucât experienţa arată că elongaţia unei particule a mediului (deci pentru valoare fixată a lui y) $\psi(t)$ are aceeaşi tip de lege de variaţie în timp, ca şi derivatele sale $\dot{\psi}(t)$ şi $\ddot{\psi}(t)$. Aşadar:

$$\xi(y,t) = \varphi(y)e^{i\omega t}. \tag{2.47}$$

Calculând derivatele de ordin II ale lui ξ din ecuaţia precedentă în raport cu y şi t şi înlocuindule în ecuaţia (2.43)vom găsi:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{v^2}\varphi = 0. \tag{2.48}$$

Ecuaţie (2.48) admite o soluţie de forma:

$$\varphi(y) = \varphi_m e^{i\frac{\omega}{v}y}. \tag{2.49}$$

Raportul $\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\nu}{v} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi}{\lambda}$ se numeşte *număr de undă*. Mărimea $\lambda = vT$ reprezintă distanţa parcursă de perturbaţie în decurs de o perioadă şi se numeşte *lungime de undă*.

Folosind ecuaţiile (2.49) şi (2.47) vom putea scrie:

$$\xi(y,t) = \varphi_m e^{iky} e^{i\omega t} = \varphi_m e^{i(\omega t+ky)}. \tag{2.50}$$

Folosind numai partea reală a ecuaţiei anterioare vom putea scrie:

$$\xi(y,t) = \xi_m \cos(\omega t + ky), \tag{2.51}$$

în care $\xi_m = \varphi_m$ reprezintă amplitudinea mişcării periodice. Mărimea $(\omega t + ky)$ se numeşte *faza undei*. Având în vedere că o astfel de perturbaţie este un fenomen *dublu periodic, în spaţiu şi timp*, o aceeaşi valoare a lui $\xi(y,t)$ va apărea la un moment $t + dt$ într-un punct y':

$$\xi(y,t) = \xi(y', t + dt), \tag{2.52}$$

adică:

$$\xi_m e^{i(\omega t+ky)} = \xi_m e^{i(\omega t+\omega dt+ky')},$$

ceea ce înseamnă:

$$ky = \omega dt + ky' \Rightarrow y' = y - \frac{\omega}{k}dt. \tag{2.53}$$

Din relaţia (2.53) rezultă că, de fapt $y' < y$. Aceasta înseamnă că ecuaţia (2.51) descrie, de fapt, propagarea în sens contrar axei Oy a unei unde. Aceasta se numeşte, de aceea, *undă regresivă*. Ecuaţia undei *progresive* se va scrie ca:

$$\xi(y,t) = \xi_m \cos(\omega t - ky). \tag{2.54}$$

Ecuaţia (2.54) arată că, într-o imagine "îngheţată" la un moment t, faza de oscilaţie a punctelor plasate *la dreapta* unui punct de referinţă are o valoare din ce în ce mai mică. Se înţelege că punctul aflat la distanţa care corespunde situaţiei în care paranteza este zero are coordonata:

$$\omega t - ky_M = 0 \Rightarrow y_M = \frac{\omega}{k}t.$$

Acest punct se numeşte *front de undă*. Evident, în cazul unei unde care se propagă, de exemplu, într-o bară paralelă cu axa Oy, o aceeaşi valoare a fazei o vor avea toate punctele

dintr-un plan $y = \text{const}$. De aceea, ecuaţiile (2.51) şi (2.54) se numesc ecuaţiile unor *unde plane* regresive, respectiv progresive.

Raportul $\frac{dy}{dt} = \frac{\omega}{k} = v_f$ se numeşte şi viteza de propagare a fazei sau *viteza de fază* a undei.

Ca în cazul tuturor perturbaţiilor dublu periodice (undelor) care se propagă în medii elastice, ecuaţiile (2.43) sau (2.45) sunt cu derivate parţiale, elongaţia ξ fiind o funcţie de variabilele, y şi t.

Pentru a găsi expresia concretă a lui $\xi(y,t)$ ne vom folosi de condiţiile la limită. De exemplu, în cazul unei corzi fixate la ambele capete, funcţia $\xi(y,t)$ satisface următoarele condiţii:

$$\xi(y,0) = \xi_0(y);\ \xi(0,t) = \xi(L,t) = 0;\ \left.\frac{\partial \xi}{\partial t}\right|_{t=0} = \dot{\xi}_0(y) \tag{2.55}$$

unde L este lungimea corzii.

Găsirea soluţiei ecuaţiei diferenţiale a undelor se face folosind *metoda separării variabilelor*. Acest lucru este sugerat de observaţiile experimentale: dependenţa $\xi(y)$ este independentă de dependenţa $\xi(t)$. Dacă, de exemplu, fixăm o anumită valoare a lui t (de exemplu, fotografiem o coardă elastică ce vibrează periodic, sau suprafaţa apei unui lac), constatăm că $\xi(y)$ este o funcţie periodică în spaţiu. Invers, dacă fixăm o anumită valoare a lui y (punem, de exemplu, un mic "punct" colorat pe coardă, sau o plută de mici dimensiuni pe suprafaţa apei şi urmărim doar mişcarea acestor corpuri "reper") vom constata că ξ variază periodic în timp. Aşadar vom presupune, prin ipoteză, că:

$$\xi(y,t) = \varphi(y)\psi(t) \tag{2.56}$$

Înlocuind pe $\xi(y,t)$ în ecuaţia diferenţială a undei, vom găsi *două* ecuaţii diferenţiale *independente*:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} & = & \psi(t)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} & = & \varphi(y)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \end{array} \tag{2.57}$$

Înlocuind (2.57) în (2.43) găsim:

$$\frac{v^2}{\varphi(y)} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{\psi(t)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{2.58}$$

Ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale (2.58) are, în membrul stâng o funcţie exclusivă de y, iar în membrul drept o funcţie exclusivă de t. Ea va fi satisfăcută în orice condiţii dacă, atât membrul drept, cât şi cel stâng sunt egale cu o constantă, pe care o vom nota cu $-\omega^2$.

În ceea ce priveşte membrul stâng al ecuaţiei (2.58), vom putea scrie:

$$\frac{v^2}{\varphi(y)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\omega^2,\ \text{de unde:}\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{v^2}\varphi \tag{2.59}$$

Pentru cantitatea din membrul drept al (2.58) vom avea:

$$\frac{1}{\psi(t)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2,\ \text{de unde}\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \omega^2 \psi = 0 \tag{2.60}$$

Constatăm imediat, din ecuaţia (2.60) că ω are semnificaţia unei frecvenţe unghiulare (pulsaţii). De fapt, ecuaţia (2.60) este una de tip oscilator armonic, ecuaţia diferenţială însăşi fiind aceea a unui oscilator armonic. Soluţia generală $\psi(t)$ este, aşadar:

$$\psi(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \tag{2.61}$$

unde constantele A şi B sunt arbitrare. Ele vor fi determinate concret folosindu-ne de condiţiile la limită (2.55).

Revenind la (2.59), constatăm ca, de fapt, şi această ecuaţie diferenţială este tot de tip oscilator armonic, pulsaţia fiind acum $\frac{\omega}{v}$. Soluţia ecuaţiei diferenţiale ordinare (2.59) se va scrie sub forma:

$$\varphi(y) = C\cos\frac{\omega}{v}y + D\sin\frac{\omega}{v}y \tag{2.62}$$

Înlocuind ecuaţiile (2.61) şi (2.62) în (2.56) obţinem:

$$\xi(y,t) = \left[C\cos\left(\frac{\omega}{v}y\right) + D\sin\left(\frac{\omega}{v}y\right)\right]\left[A\cos\omega t + B\sin\omega t\right] \tag{2.63}$$

Capătul coardei fiind fix, $\xi(0,t) = 0, \forall t$, deci:

$$0 = C\cos\left(\frac{\omega}{v}y\right) + D\sin\left(\frac{\omega}{v}y\right)$$

de unde $C = 0$. Prin urmare:

$$\varphi(y) = D\sin\frac{\omega}{v}y \tag{2.64}$$

La $x = L$, din nou: $\xi(L,0) = 0$, în orice moment, cu alte cuvinte $\varphi(L) = 0$ în ecuaţia (2.64):

$$0 = D\sin\frac{\omega}{v}L \tag{2.65}$$

Aceasta se întâmplă atunci când:

$$\frac{\omega}{v}L = n\pi \quad \text{cu } n = 1,2,3,\ldots \tag{2.66}$$

(cazul $D = 0$ este exclus, fiindcă el ar conduce, împreună cu condiţia $C = 0$ la soluţia banală, $\xi = 0$).

Din ecuaţia (2.66) rezultă că:

$$\omega_n = n\pi\frac{v}{L} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\lambda}} \text{ şi } \nu_n = \frac{n}{L}\sqrt{\frac{T}{\lambda}} \tag{2.67}$$

Cu acest din urmă rezultat, ecuaţia (2.63) devine:

$$\xi(y,t) = (A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t)\sin\frac{n\pi}{L}y \tag{2.68}$$

unde am notat produsele DA cu A_n şi BD cu B_n.

Aşadar, o coardă are nu una, ci n frecvenţe proprii, $\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$. Pentru o valoare fixată a lui n, legea de mişcare a corzii va fi:

$$\xi(y,t) = A_n \sin\frac{n\pi}{L} y \cos\frac{n\pi v}{L} t + B_n \sin\frac{n\pi}{L} y \sin\frac{n\pi v}{L} t \tag{2.69}$$

Ecuaţia (2.69) reprezintă aşa-numitele *moduri normale* de vibraţie ale corzii. Ea se scrie, de obicei, sub forma:

$$\xi(y,t) = A_n \sin\frac{n\pi y}{L} \cos\omega_n t + B_n \sin\frac{n\pi y}{L} \sin\omega_n t \tag{2.70}$$

Trebuie remarcat că, aşa cum rezultă şi din Fig. 2.6, o coardă poate vibra *în oricare* din modurile reprezentate în Fig. 2.6. Ceea ce este la fel de important este că ea poate vibra *simultan* pe unul sau mai multe moduri reprezentate în Fig. 2.6.

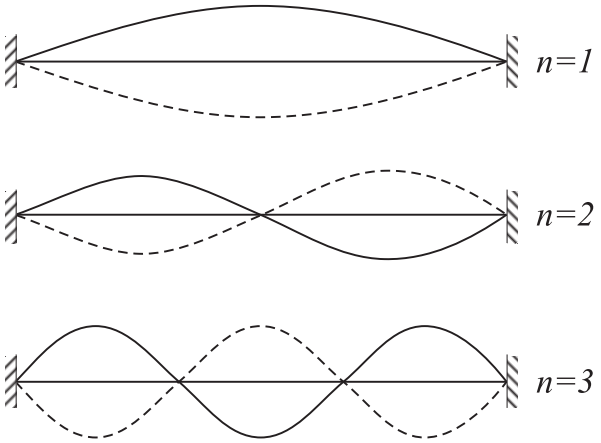

Figura 2.6: Primele 3 moduri de vibraţie ale unei corzi elastice de lungime L, fixată la ambele capete.

Oscilaţiile corzii cu frecvenţa ω_1 reprezintă aşa-numitul *mod fundamental*, cele corespunzătoare la $n = 2, 3, \ldots$ se numesc *armonici* de ordinul $2, 3, \ldots$.

Pentru a calcula amplitudinea armonicelor (A_n şi B_n) de diverse ordine, vom recurge din nou la condiţiile la limită, pentru ecuaţia (2.69). Derivând această ecuaţie în raport cu timpul vom găsi:

$$\dot{\xi}(y,t) = -A_n \frac{n\pi v}{L} \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi v}{L} t\right) + B_n \frac{n\pi v}{L} \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi v}{L} t\right) \tag{2.71}$$

Cunoscând ecuaţia carte descrie forma corzii la momentul iniţial şi viteza oricărei particule a corzii la acelaşi moment:

$$\xi(y,0) = \xi_0(y) \text{ şi } \dot{\xi}(y,0) = \dot{\xi}(y), \tag{2.72}$$

vom obţine, prin înlocuire în (2.69) şi (2.71):

$$\xi_0(y) = A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right), \tag{2.73}$$

$$\dot{\xi}_0(y) = B_n \frac{n\pi v}{L} \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right). \tag{2.74}$$

Revenind la Fig. 2.6 şi ecuaţia (2.69) să notăm că, în conformitate cu teoria ecuaţiilor diferenţiale, dacă ξ_1 şi ξ_2 sunt două soluţii particulare care satisfac condiţiile la limită (2.55), atunci o soluţie generală, scrisă ca o combinaţie liniară de ξ_1 şi ξ_2 este, de asemenea, o soluţie a acelei ecuaţii diferenţiale. Vom scrie acest lucru, în condiţiile în care combinaţia liniară de ξ_1 şi ξ_2 este suma:

$$\xi(y,t) = \xi_1(y,t) + \xi_2(y,t) + \ldots + \xi_k(y,t) + \ldots$$

în care $\xi_i(y,t)$ sunt de forma (2.69). Cu alte cuvinte:

$$\xi(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin\frac{n\pi y}{L} \cos\omega_n + B_n \sin\frac{n\pi y}{L} \sin\omega_n t \right) \tag{2.75}$$

O soluţie de tip (2.75) conţine o infinitate de constante arbitrare. Aşa cum am arătat în Partea I, ecuaţia (2.75) reprezintă *seria Fourier trigonometrică*, ai căror coeficienţi, A_n şi B_n se calculează conform ecuaţiilor:

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \xi_0(y) \sin\frac{n\pi y}{L} dy, \tag{2.76}$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi v}\int_0^L \dot{\xi}_0(y) \sin\frac{n\pi y}{L} dy. \tag{2.77}$$

Se demonstrează că un comportament similar corzii vibrante îl prezintă coloana de aer dintr-un tub sonor, acolo unde avem de a face cu unde longitudinale în gaz. De aceea nu e întâmplător faptul că instrumentele muzicale folosesc în mod extensiv coardele şi tuburile sonore de unde elastice (în acest caz-sunete). Astfel de surse de unde elastice sunt capabile să producă sunete având un spectru complex. Oscilaţiile corzilor viorii, violoncelului, dar şi flautului, naiului, orgii ş.a.m.d. conţin, pe lângă fundamentală, un număr de armonici. Prezenţa specifică a armonicilor în cazul fiecărui instrument, percepută subiectiv prin noţiunea de *timbru acustic* este una din însuşirile ce diferenţiază diferitele instrumente între ele. În acest context, vocea umană (care se bazează pe undele emise de coardele sonore) este unul dintre cele mai performante instrumente muzicale.

Ecuaţia lui Mersenne (2.67) determină în mare măsură caracteristicile unui instrument muzical, al cărui sunet fundamental, dar şi şi armonicele sale sunt determinate de tensiunea din coardă, lungimea acesteia, precum şi densitatea liniară de masă (în cazul instrumentelor cu coloană de aer, instrumentele de suflat), T şi λ sunt înlocuite de caracteristicile aerului (coeficientul Poisson C_P/C_V şi masa molară a aerului) şi de temperatură. Constatăm, prin urmare, că stabilitatea intrinsecă a unui instrument de suflat este mai ridicată (frecvenţa fundamentală depinzând, de fapt, numai de temperatură). De aceea, instrumentele cu coarde sunt mai dificil de acordat, pentru a produce sunetul fundamental.

Cu titlu de exemplu, putem aminti aici că, în cazul pianului, care trebuie să emită sunete muzicale cuprinse într-un interval de 7 octave (aceasta înseamnă că raportul dintre frecvenţa minimă şi cea maximă este de $2^7 = 128$), dacă toate corzile ar fi făcute din acelaşi fir, ar fi nevoie de tensiuni care ar sta în raportul:

$$\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = \left(2^7\right)^2 = 2^{14} = 16384$$

Este evidentă că această situaţie este imposibilă în practică, de aceea atât masa unităţii de lungime a corzilor, cât şi lungimea corzilor se aleg diferenţiat. Aceasta este explicaţia pentru profilul geometric al pianului, care aminteşte de forma de harpă. Ca şi în cazul harpei, diferenţele în diametrul şi lungimea corzilor sunt cele mai vizibile mărimi. Acelaşi lucru, deşi mai puţin spectaculos, este valabil şi în cazul chitarei, viorii etc., acolo unde modificarea lungimii corzilor active se modifică manual de către instrumentist. Este, de asemenea, interesant de notat că corzile care produc sunete mai joase sunt fire mai groase pe care se înfăşoară un alt fir (de obicei din argint) pe întreaga lungime. Astfel, coarda rămâne flexibilă şi nedispersivă (adică frecvenţele armonicelor rămân multipli ai celei fundamentale), o caracteristică ce nu este întotdeauna valabilă în cazul corzilor foarte groase.

În sfârşit, să menţionăm că, de fapt, sunetele produse de instrumentele muzicale sunt determinate în mare măsură de efectul determinant al cutiilor de rezonanţă ataşate sistemului de coarde. În cazul instrumentelor cu coarde, aceste cutii de rezonanţă au un efect de "amplificare" a sunetelor. De fapt, cutiile de rezonanţă reprezintă dispozitive de adaptare a impedanţei sonore a corzilor cu mediul extern, făcând ca o mai mare fracţiune din energia sonoră să fie transmisă la distanţă. Cum astfel de cutii de rezonanţă (în cazul pianului este vorba despre o placă de rezonanţă) nu "amplifică" în mod uniform toate sunetele fundamentale emise de coardele sonore, acest fapt modifică timbrul fiecărui instrument muzical şi face ca, deşi într-o orchestră, la un moment dat, de exemplu, toate instrumentele cu coarde emit aceeaşi nota muzicală, timbrul lor să fie diferit. De fapt, spectrul sunetelor emise de fiecare coardă, sau armonicele acestora sunt multiplicat e cu o *funcţie de transfer*, f, neuniformă, denumită *formant*.

Pentru ilustrare, să ne referim la Fig. 2.7. Aici am reprezentat situaţia (destul de improbabilă în practică) în care spectrul armonicelor sunetului emis de o coardă vibrantă conţine componente *de aceeaşi amplitudine* (Fig. 2.7(a)).

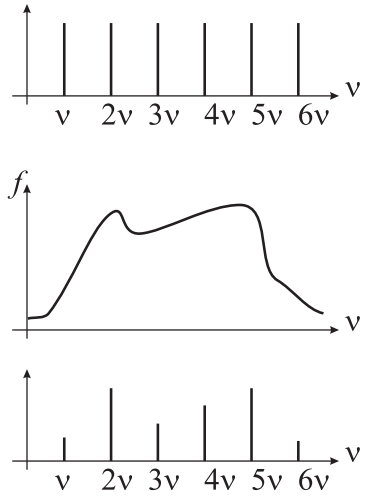

Figura 2.7: a) spectrul sunetului produs de *coarda vibrantă*; b) caracteristica de "amplificare" a cutiei de rezonanţă ($f = A_{iesire}/A_{intrare}$, A amplitudinea); c) spectrul sunetului produs de *instrumentul cu coarde*.

Dacă formantul cutiei de rezonanţă se caracterizează prin caracteristica de transfer din

Fig. 2.7(b), sunetul produs de instrument va rezulta din modularea spectrului din Fig. 2c(a) cu caracteristica – formant reprezentată Fig. 2.7(b), rezultatul fiind reprezentat în Fig. 2.7(c).

Se explica astfel bogăţia spectrală (aşa-numita *culoare sonoră* a vocii omeneşti, datorită modificării în limite foarte largi a cavităţii sonore a laringelui şi cavităţii bucale.

2.6 Energia transportată de unda elastică

Să considerăm, în cele ce urmează, un volum elementar dintr-un mediu elastic prin care se propagă o undă. Energia totală conţinută în acesta este:

$$dE_t = dE_c + dE_p = \frac{1}{2}\rho dV\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}k\xi^2. \tag{2.78}$$

Întrucât $k = dm\omega^2 = \rho dV\omega^2$, rezultă că:

$$dE_t = \frac{1}{2}\rho dV(\dot{\xi}^2 + \omega^2\xi^2). \tag{2.79}$$

În relaţiile anterioare:

$$\xi = \xi_m \sin(\omega t - ky)$$
$$\dot{\xi} = \omega\xi_m \cos(\omega t - ky),$$

sunt elongaţia, respectiv viteza instantanee a punctelor materiale din volumul elementar dV. Ca urmare relaţia (2.79) devine:

$$dE_t = \frac{1}{2}\rho dV\xi_m^2\omega^2\left[\sin^2(\omega t - ky) + \cos^2(\omega t - ky)\right],$$

adică

$$dE_t = \frac{1}{2}\rho dV\xi_m^2\omega^2. \tag{2.80}$$

Notând cu v_g viteza de grup a undei în mediul respectiv, volumul dV poate fi exprimat şi sub forma:

$$dV = Sv_g dt.$$

Cum $\omega = 2\pi\nu$, vom putea scrie, în final:

$$dE_t = 2\pi^2\nu^2\rho S v_g \xi_m^2 dt. \tag{2.81}$$

Pe baza relaţiei (2.81), intensitatea undei, definită prin relaţia:

$$I = \frac{dE_t}{Sdt}, \tag{2.82}$$

poate fi scrisă ca fiind:

$$I = 2\pi^2\nu^2\rho v_g\xi_m^2. \tag{2.83}$$

Constatăm, prin urmare că *intensitatea unei unde este proporţională cu pătratul cu pătratul amplitudinii oscilaţiilor mediului şi cu pătratul frecvenţei undei.* Aşa cum vom constata mai târziu, această concluzie este importantă în alegerea unui anumit tip de sursă de unde elastice (dar şi electromagnetică) pentru o aplicaţie dată.

2.6.1 Unde circulare

În mod frecvent, discuţia propagării undelor elastice se face presupunând că amplitudinea undei rămâne nemodificată în timpul propagării. Acest lucru rămâne valabil dacă:

(a) Mediul elastic prin care se propagă unda este ideal (ne-absorbant);

(b) unda este uni-dimensională (sau plană).

Chiar şi în ipoteza (a), în cazurile reale amplitudinea descreşte datorită scăderii densităţii superficiale de energie, aşa cum vom arăta în cele ce urmează. Să considerăm o sursă punctiformă care produce unde circulare într-un plan (de exemplu, pe suprafaţa apei). În Fig. 2.8 am reprezentat o sursă de unde circulare, plasată în O, împreună cu porţiunea de la suprafaţa lichidului în care apar perturbaţii ondulatorii, în conditiile în care unda trece prin suprafaţa dS_0, aflată la distanţa r_0 de referinţă, respectiv prin suprafaţa dS, aflată la distanţa $r > r_0$. O

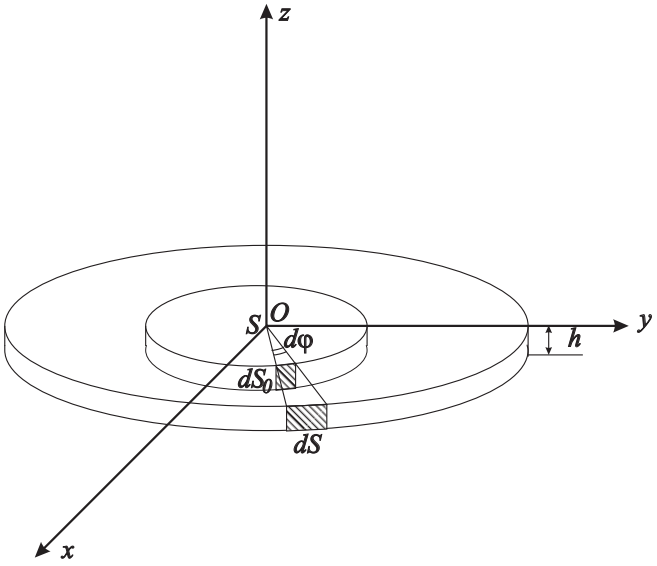

Figura 2.8: O imagine a zonei circulare în care se propagă o undă circulară superficială.

anumită cantitate de energie, care traversează, în unitatea de timp, suprafaţa haşurată dS_0 va trebui să fie (în absenţa absorbţiei energiei de către mediu) egala cu energia care trece în aceeaşi unitate de timp prin suprafaţa haşurată dS. Ambele suprafeţe, dS_0 şi dS sunt "decupate" de unghiul $d\alpha$ pe două suprafeţe cilindrice de înălţime h. Cum:

$$dS_0 = r_0 d\alpha h \text{ şi } dS = r d\alpha h,$$

aplicând conservarea energiei vom obţine:

$$2\pi^2\nu^2\xi_m(r_0)v_f r_0 d\alpha h = 2\pi^2\xi_m(r)v_f r d\alpha h \tag{2.84}$$

de unde:

$$\xi_m(r) = \sqrt{\frac{r_0}{r}}\xi_m(0) \tag{2.85}$$

Aşadar, amplitudinea unei unde circulare descreşte invers proporţional cu radicalul din distanţa parcursă. În loc de *numărul de undă* $\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$, mărime care apare în cazul propagării uni-dimensionale, în acest caz vom avea de a face cu un *vector de undă*, $\vec{k}(k_x, k_y)$:

$$\vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} \tag{2.86}$$

Întrucât unda se propagă într-un plan, orice distanţă parcursă (radial) de către undă se va scrie sub forma:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} \tag{2.87}$$

Soluţia undei bidimensionale se va scrie sub forma:

$$\xi(x, y, z) = \frac{\xi_m(r_0)}{\sqrt{r/r_0}} e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} \tag{2.88}$$

Ecuaţia (2.88) reprezintă de fapt soluţia ecuaţiei diferenţiale:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - \frac{1}{v_f^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \tag{2.89}$$

2.6.2 Unde sferice

Să examinăm acum cazul propagării unei unde produse de o sursă punctiformă într-un mediu tri-dimensional (Fig. 2.9). Vom considera, din nou, o distanţă de referinţă r_0 şi o alta

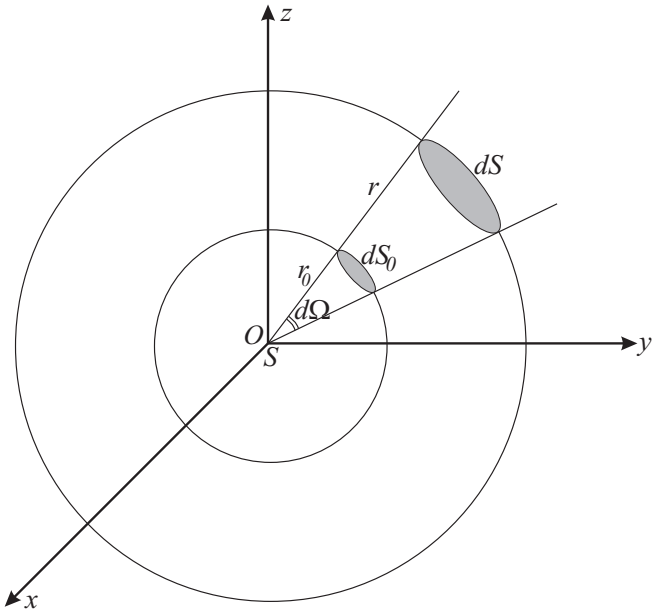

Figura 2.9: Două suprafeţe elementare de undă sferică prin care energia emisă de sursa S, la momente diferite.

r. În Fig. 2.9 am desenat două suprafeţe sferice de raze r_0 şi r, sursa de unde fiind plasată în originea O. Am reprezentat de asemenea, suprafeţele dS_0 şi dS decupate de unghiul solid $d\Omega$ cu centrul în O.

$$d\Omega = \frac{dS_0}{r_0^2} = \frac{dS}{r^2} \tag{2.90}$$

Cum energia mecanică emisă de sursa S care trece în unitatea de timp prin cele două suprafeţe trebuie să fie aceeaşi, trebuie să avem:

$$2\pi^2\nu^2\xi_{m0}^2\rho v_f d\Omega r_0^2 = 2\pi^2\nu^2\xi_m^2\xi_M^2\rho v_f d\Omega r^2 \tag{2.91}$$

în care ξ_{m0} şi ξ_m reprezintă amplitudinea undei la distanţa r_0, respectiv r. Rezultă că:

$$\xi_m = \frac{r_0}{r}\xi_{m0} \tag{2.92}$$

cu alte cuvinte, amplitudinea undei sferice descreşte hiperbolic cu distanţa. În acest caz, produsul $\vec{k}\cdot\vec{r}$ este:

$$\vec{k}\cdot\vec{r} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$$

iar soluţia ecuaţiei diferenţiale a undei tridimensionale(în coordonate carteziene):

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} - \frac{1}{v_f^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0 \tag{2.93}$$

este:

$$\xi_m(r) = \frac{\xi_m}{r/r_0}e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}. \tag{2.94}$$

Observaţie Ecuaţia diferenţială (2.93) se scrie sub o formă mai compactă dacă recurgem la operatorul lui Laplace (denumit şi laplacean), Δ:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.95}$$

adică:

$$\Delta\xi - \frac{1}{v_f^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0. \tag{2.96}$$

Capitolul 3

Propagarea undelor elastice în medii elastice neomogene

3.1 Reflexia şi transmisia undelor elastice

Să considerăm, în continuare, propagarea unei unde elastice uni-dimensionale, într-un mediu neomogen. Fie cazul simplu al unei perechi de medii elastice, separate printr-o suprafaţă plană (Σ) perpendiculară pe direcţia de propagare a unei unde incidente progresive unidimensionale i (Fig. 3.1) (axa Oy)

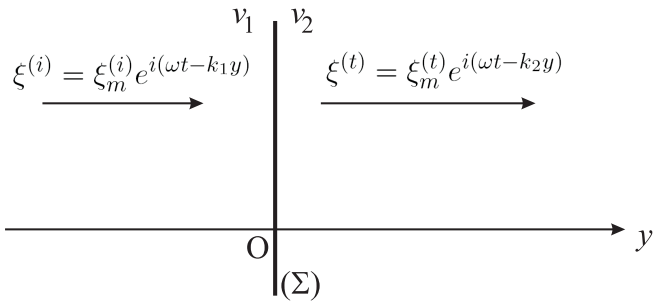

Figura 3.1: Două medii elastice în care undele se propagă cu viteze diferite, separate printr-o suprafaţă plană.

Ecuaţiile undei în cele două medii, în care vitezele de propagare sunt v_1 şi v_2 sunt:

- pentru unda incidentă: $\xi^{(i)} = \xi_m^{(i)} e^{i(\omega t - k_1 y)}$;
- pentru unda transmisă în mediul al 2-lea: $\xi^{(t)} = \xi_m^{(t)} e^{i(\omega t - k_2 y)}$;

Semnul minus la exponent a fost ales întrucât ambele unde sunt progresive.

Impunând condiţia de continuitate a elongaţiei (cu alte cuvinte condiţia ca mediul să nu se "rupă" la suprafaţa de separaţie dintre mediile 1 şi 2) şi a derivatei acesteia, ajungem la

o concluzie interesantă dacă am crede că toată energia undei incidente ar trece în mediul al doilea.

Având în vedere că, în vecinătatea stângă, respectiv dreaptă a suprafeţei (Σ), y tinde la zero, prin valori mai mici, respectiv mai mari decât zero, condiţiile de continuitate ale elongaţiei şi ale derivatei acesteia în raport cu y impun ca:

$$\xi^{(i)}(y\to 0)_{(y<0)} = \xi^{(t)}(y\to 0)_{(y>0)};$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\xi^{(i)}(y\to 0)_{(y<0)}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\xi^{(t)}(y\to 0)_{(y>0)}\right]$$

Cu alte cuvinte,

$$\begin{aligned} \xi_m^{(i)} e^{i\omega t} &= \xi_m^{(t)} e^{i\omega t}; \\ -k_1 \xi_m^{(i)} e^{i\omega t} &= k_2 \xi_m^{(t)} e^{i\omega t}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Întrucât, din prima ecuaţie a sistemului (3.1) rezultă $\xi_m^{(t)} = \xi_m^{(i)}$, din ecuaţia (3.1.2) rezultă că $k_1 = k_2$. Cum $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = 2\pi\frac{\nu}{v_1}$ şi $k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = 2\pi\frac{\nu}{v_2}$, rezultă că $v_1 = v_2$, ceea ce contrazice ipoteza enunţată iniţial ($v_1 \neq v_2$). Această contradicţie dispare dacă introducem ipoteza reflexiei unei fracţiuni din energia undei incidente în chiar mediul din care ea provine.

Reflexia reprezintă fenomenul de întoarcerea unei fracţiuni din energia undei incidente în *chiar mediul din care unda provine*, atunci când aceasta întâlneşte suprafaţa de separaţie cu un mediu diferit (în cazul nostru, un mediu în care $v_2 \neq v_1$).

Tabloul prezentat în Fig. 3.1, completat cu prezenţa undei reflectate este redesenat în Fig. 3.2.

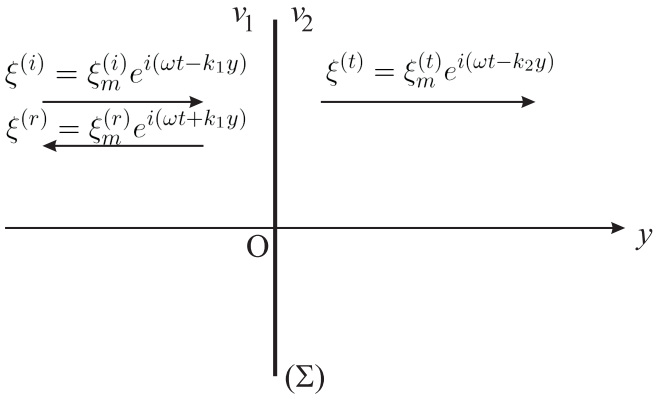

Figura 3.2: Cele trei unde care există în cazul reflexiei unei unde mecanice pe suprafaţa ce separă două medii diferite.

Să notăm semnul + în faţa ultimului termen al exponenţialei din expresia elongaţiei undei reflectate, întrucât unda reflectată este progresivă:

$$\xi^{(r)} = \xi_m^{(r)} e^{i(\omega t + k_i t)}.$$

Impunând, din nou, condiţia de continuitate a elongaţiei şi derivatei acesteia în raport cu y la limita de separaţie dintre cele 2 medii, vom avea:

$$\begin{aligned} \xi_m^{(i)} e^{i\omega t} + \xi_m^{(r)} e^{i\omega t} &= \xi_m^{(t)} e^{i\omega t}; \\ -k_1 \xi_m^{(i)} e^{i\omega t} + k_1 \xi_m^{(r)} e^{i\omega t} &= -k_2 \xi_m^{(t)} e^{i\omega t}; \end{aligned} \tag{3.2}$$

adică un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute ($\xi_m^{(r)}$ şi $\xi_m^{(t)}$):

$$\begin{aligned} \xi_m^{(i)} + \xi_m^{(r)} &= \xi_m^{(t)}; \\ k_1(\xi_m^{(i)} - \xi_m^{(r)}) &= k_2 \xi_m^{(t)}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Acest sistem de ecuaţii permite calcularea amplitudinilor undelor reflectate, respectiv transmisă, ca funcţii de amplitudinea undei incidente.

$$\xi_m^{(r)} = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \xi_m^{(i)}; \tag{3.4}$$

$$\xi_m^{(t)} = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} \xi_m^{(i)}. \tag{3.5}$$

Ecuaţiile (3.1) poartă numele de *ecuaţiile lui Fresnel* ale amplitudinilor undelor. Constatăm că, de exemplu, fracţiunea reprezentând energia undelor reflectate va fi cu atât mai importantă, cu cât diferenţa dintre vitezele de propagare a undelor este mai mare. Într-adevăr, dacă vom introduce un *coeficient de reflexie a energiei* la suprafaţa de separaţie dintre cele două medii:

$$R = \frac{E_{tr}}{E_{ti}},$$

întrucât energia este proporţională cu pătratul amplitudinii (iar frecvenţa ν rămâne neschimbată!), vom avea, conform relaţiei (2.83):

$$R = \left(\frac{\rho_1 v_1 \xi_m^{(r)} 2}{\rho_2 v_2 \xi_m^{(i)2}} \right) = \frac{Z_1}{Z_2} \left(\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}. \right)^2 \tag{3.6}$$

În relaţia (3.6) am introduc mărimile fizice $Z_1 = \rho_1 v_1$ şi, respectiv $Z_2 = \rho_2 v_2$ numite *impedanţe de undă* în mediile (1) şi (2).

Constatăm, de asemenea, că, în condiţiile în care viteza v_2 este din ce în ce mai mare în comparaţie cu v_1, o fracţiune din ce în ce mai mare din energia undei incidente va trece în mediul al doilea. Putem defini şi un *coeficient de transmisie* al energiei în mediul al 2-lea.

$$T = \frac{E_{tt}}{E_{ti}} = 1 - R.$$

Evident, conform legii conservării energiei, suma coeficienţilor $R + T = 1$.

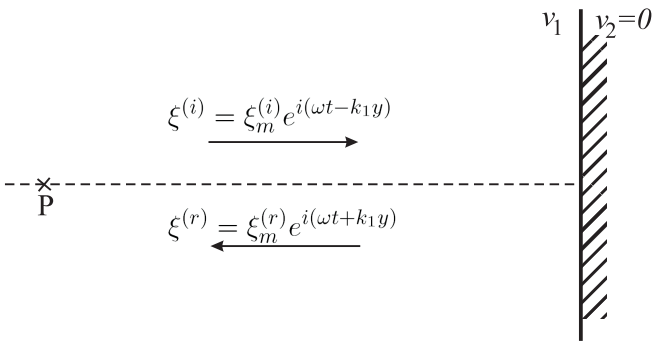

Figura 3.3: Reflexia totală a unei unde incidente unidimensionale.

3.1.1 Reflexia totală a undelor elastice uni-dimensionale

Sa considerăm acum cazul particular în care $v_2 = 0$. Această situaţie apare în realitate, de exemplu, atunci când o coardă elastică, prin care o undă elastică progresivă se propagă cu o viteză anumită $\left(v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}\right)$ este prinsă la capătul său din dreapta (Fig. 3.3) de un perete rigid.

Conform ecuaţiilor lui Fresnel (3.1) în acest caz vom avea:

$$\begin{aligned} \xi_m^{(r)} &= -\xi_m^{(i)}; \\ \xi_m^{(t)} &= 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Întrucât amplitudinea este, prin definiţie, o mărime fizică strict pozitivă, vom scrie ecuaţia (3.7.1) sub forma:

$$\xi_m^{(r)} = -\xi_m^{(i)} = \xi_m^i e^{i\pi}. \tag{3.8}$$

În orice punct P vom avea, prin urmare, o compunere (adunare) a oscilaţiilor mediului, impuse de unda incidentă cu oscilaţiile impuse de unda reflectată[1]. Prin urmare:

$$\xi_P = \xi_m^i e^{i(\omega t - k_1 t)} + \xi_m^{(i)} e^{i(\omega t + k_1 y + \pi)}.$$

Remarcăm că, în urma reflexiei totale, unda reflectată uni-dimensională, are amplitudinea egală cu acea a undei incidente, însă ea *este în opoziţie de fază* cu aceasta (între undele incidentă şi reflectată există un defazaj de π radiani). Revenind la ecuaţia anterioară, şi dezvoltând exponenţialele conform formulei lui Euler:

$$\begin{aligned} \xi_P &= \xi_m^{(i)} e^{i\omega t} \left[\cos k_1 y - i \sin k_1 y + \cos(k_1 y + \pi) + i \sin(k_1 y + \pi)\right] \\ &= -2i\xi_m^{(i)} e^{i\omega t} \sin k_1 y. \end{aligned}$$

Şi aici vom înlocui pe $(-i)$ folosind relaţia $-i = e^{-i\pi/2}$. Ca urmare:

$$\xi_P = 2\xi_m^{(i)} \sin k_1 y e^{i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}. \tag{3.9}$$

[1]Un astfel de raţionament este valabil, după cum am arătat anterior, în cazul teoriei liniare a propagării undelor elastice.

Constatăm că *oscilaţiile* punctului P rezultate din superpoziţia celor două unde au aceeaşi pulsaţie, ca şi unda incidentă, însă ele sunt în cuadratură de fază de mişcarea indusă de unda incidentă, respectiv cea reflectată. În plus, amplitudinea acestor oscilaţii, pe care o vom nota ξ_{mP} are o valoare:

$$\xi_{mP} = 2\xi_m^{(i)} \sin k_1 y \tag{3.10}$$

care depinde de localizarea punctului P (adică de distanţa de la suprafaţa reflectătoare (Σ) la punctul în care se examinează starea de oscilaţie). Astfel, vor exista poziţii ale punctului P, în care oscilaţia va avea *amplitudine maximă* şi, respectiv *minimă*, în funcţie de faptul dacă $\sin k_1 y = 1$, respectiv $\sin k_1 y = 0$. În primul caz: $k_1 y_M = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, de unde $y_M = (2n+1)\frac{\pi}{2k_1}$, adică:

$$y_M = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \tag{3.11}$$

În al doilea caz: $\sin(k_1 y_m) = 0$, de unde $k_1 y_m = n\pi$ şi:

$$y_m = n\frac{\lambda}{2} = 2n\frac{\lambda}{4}. \tag{3.12}$$

Aşadar punctul P va oscila cu amplitudine maximă (dată de ecuaţia (3.11)) respectiv minimă (3.12), în poziţia în care distanţa de la P la (Σ) este un număr impar, respectiv par de semi-lungimi de undă. De fapt, din suprapunerea efectelor undei incidente cu cea reflectate, caz care reprezintă aici o situaţie particulară a unui fenomen mai general în mecanica ondulatorie, numit *interferenţa undelor* (şi de care ne vom ocupa în detaliu într-o secţiune următoare) rezultă o aşa-numita *undă staţionară*. Coarda vibrantă oscilează în regim staţionar, fiecare punct al său executând o oscilaţie a cărei amplitudine este constantă în timp. Punctele date de ecuaţia (3.11) care oscilează cu amplitudine maximă ($2\xi_m^{(i)}$), se numesc *ventre de oscilaţie*. Punctele date de ecuaţia (3.12) care rămân în permanenţă în repaus se numesc *noduri de oscilaţie*. Între nodurile şi ventrele de oscilaţie, punctele mediului vor oscila (în cazul corzii vibrante – perpendicular pe direcţia acesteia) cu amplitudini având valori cuprinse între 0 şi $2\xi_m^{(i)}$.

Aşadar, distanţa dintre două noduri consecutive (sau dintre două ventre consecutive) este $\lambda/2$, iar distanţa dintre un nod şi un ventru vecin este $\lambda/4$. În Fig. 3.4 este prezentată fotografia unei unde staţionare într-o coardă vibrantă în care unda incidentă este produsă de un vibrator mecanic.

Propunem cititorului să descopere, printr-un raţionament simplu cu titlu de exemplu, că *toate punctele corzii dintre două noduri consecutive oscilează în fază* şi că între oscilaţiile acestor puncte şi acelea ale punctelor situate dincolo de un nod, există un defazaj de π radiani (cu alte cuvinte, punctele corzii situate de o parte şi de alta a unui nod de oscilaţie oscilează în opoziţie de fază).

3.1.2 Reflexia oblică a undelor. Ghiduri de undă

Sa considerăm, în cele ce urmează, situaţia în care o undă a cărei suprafeţe de undă se propagă în modul reprezentat în Fig. 3.5 întâlneşte o suprafaţă reflectătoare plasată în planul $y = 0$. Ecuaţia undei incidente scrisă sub forma complexă este:

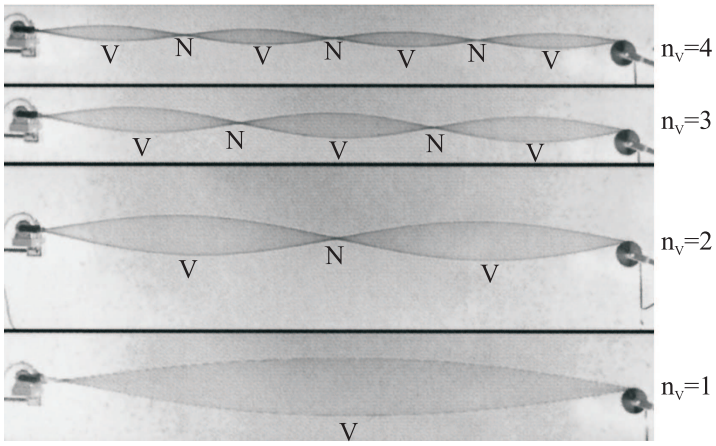

Figura 3.4: Fotografia unei coarde vibrante în care se produc unde staţionare cu număr diferit de noduri, (N) şi ventre (V).

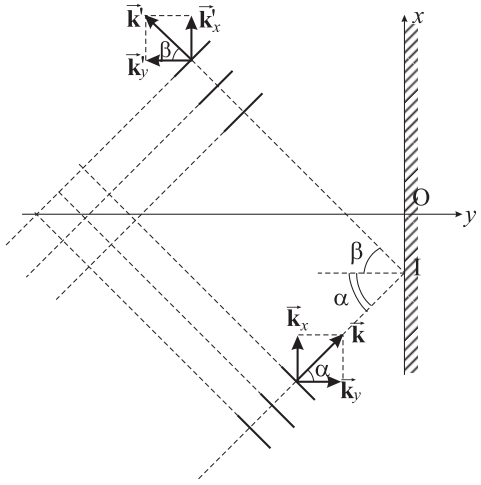

Figura 3.5: Reflexia oblică a unei unde pe o suprafaţă plană $y = 0$.

$$\xi^{(i)} = \xi_m^{(i)} e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}.q \tag{3.13}$$

În relaţia (3.13) vectorul $\vec{k}$, care are componentele k_x, k_y şi k_z de-a lungul axelor Ox, Oy şi Oz. Ca urmare, produsul se va putea scrie în coordonate carteziene, sub forma $\vec{k}\cdot\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$. Axa Oz în Fig. 3.5 o vom considera perpendiculară pe planul foii şi fiind îndreptată de la foaie spre în sus. Vom nota cu $\vec{k}'$ vectorul de undă după reflexie şi nu vom impune *a priori* nici o relaţie între unghiurile α şi β.

În orice punct din semispaţiul ($y < 0$) vom avea un fenomen de superpoziţie a efectelor combinate, determinate de unda incidentă şi de cea reflectată. Astfel elongaţia rezultantă va fi:

$$\xi = \xi^{(i)} + \xi^{(r)} = \xi_m^{(i)} e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} + \xi_m^{(r)} e^{i(\omega t \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r})}. \tag{3.14}$$

Întrucât aşa cum este arătat în Fig. 3.5, vectorul $\vec{k}$ este conţinut în planul xOy, rezultă că proiecţia sa $k_z = 0$, astfel încât, după explicitarea produselor scalare din cei doi exponenţi din relaţia (3.14) vom avea:

$$\xi = \xi_m^{(i)} e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} + \xi_m^{(r)} e^{i(\omega t - k'_x x - k'_y y - k'_z z)}. \tag{3.15}$$

Admiţând că, în semispaţiul ($y > 0$), este plasat un mediu absolut rigid, în care unda nu se propagă, atunci condiţia la limită $\xi(0, t) = 0$ la oricare moment, (inclusiv la $t = 0$) va conduce ca relaţia (3.15) să se scrie sub forma:

$$0 = \xi_m^{(i)} e^{i(-k_x x - k_y y)} + \xi_m^{(r)} e^{i(-k'_x x - k'_y y - k'_z z)}. \tag{3.16}$$

Pentru ca ecuaţia (3.16) să fie valabilă, oricare ar fi valoarea lui z, este necesar ca în relaţia (3.16) să avem:

$$k'_z = 0, \tag{3.17}$$

cu alte cuvinte, nu numai $\vec{k}$, dar şi $\vec{k}'$ trebuie să rămână în permanenţă în planul foii. În plus, relaţia (3.16) trebuie să fie oricare ar fi valoarea lui x. De aici rezultă imediat că:

$$k_x = k'_x. \tag{3.18}$$

Întrucât:

$$\left|\vec{k}\right| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$
$$\left|\vec{k}'\right| = \sqrt{k_x'^2 + k_y'^2 + k_z'^2} = \sqrt{k_x'^2 + k_y'^2}$$

rezultă că mărimile proiecţiilor lui $\vec{k}$ şi $\vec{k}'$ pe direcţia y sunt egale (k_y şi k'_y fiind de sens opus, aşa cum rezultă din Fig. 3.5). Aşadar:

$$k'_y = -k_y. \tag{3.19}$$

Prin urmare, în urma reflexiei oblice, componenta lui $\vec{k}$ paralelă cu suprafaţa reflectătoare rămâne neschimbată, în timp ce cea perpendiculară rămâne constantă în modul, dar, în urma reflexiei, îşi schimbă direcţia cu 180^o. Având în vedere ecuaţiile (3.18) şi (3.19), rezultă că unghiurile α şi β sunt egale între ele. Întrucât din relaţiile (3.16), (3.17) şi (3.18) rezultă că[2]:

$$\xi_m^{(r)} = -\xi_m^{(i)\prime}, \tag{3.20}$$

înlocuind ecuaţiile (3.17-3.20) în (3.15) vom avea:

$$\xi = Ae^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} - Ae^{i(\omega t - k_x x + k_y y)} \tag{3.21}$$

sau:

$$\xi = Ae^{i(\omega t - k_x x)} \left(e^{-ik_y y} - e^{ik_y y}\right). \tag{3.22}$$

Mai departe, dezvoltând exponenţialele conform formulei lui Euler, în funcţie de $\cos k_y y$ şi $\sin k_y y$, vom găsi:

$$\xi = 2iA \sin k_y y e^{i(\omega t - k_x x)} \tag{3.23}$$

Cum, însă $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, relaţia (3.23) poate fi rescrisă şi sub forma:

$$\xi = 2A \sin k_y y e^{i\left(\omega t - k_x x + \frac{\pi}{2}\right)}. \tag{3.24}$$

Cu alte cuvinte, *în mediul din semispaţiul negativ are loc propagarea de-a lungul axei Ox a unei unde progresive.*

Să presupunem, în continuare că, în afară de suprafaţa reflectătoare din planul $y = 0$, mai plasăm un alt plan, la distanţa $y = -d$ (Fig. 3.6). Apare astfel o limitare suplimentară impusă de condiţia la limită:

$$y = -d :; \ \xi(-a, t) = 0, \text{ la orice moment } t. \tag{3.25}$$

Trebuie satisfăcută deci o nouă condiţie, pe care o găsim aplicând condiţia (3.25) ecuaţiei (3.24):

$$0 = 2A \sin k_y y e^{i\left(\omega t - k_x x + \frac{\pi}{2}\right)}. \tag{3.26}$$

Aceasta înseamnă că, oricare ar fi valoarea lui x:

$$\sin(k_y d) = 0, \tag{3.27}$$

cu alte cuvinte:

$$k_y d = \pm n\pi, \text{ adică } k_y = \pm\frac{n\pi}{d} \text{ cu } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.28}$$

[2]Un rezultat similar am obţinut şi în cazul reflexiei totale la incidenţă normală.

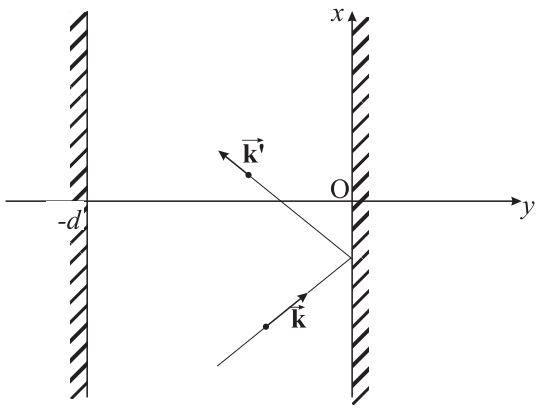

Figura 3.6: Reflexia oblică într-un ghid de unde de lăţime d.

Cu alte cuvinte, într-un astfel de "coridor" se vor propaga sub forma unei unde progresivă doar acele unde care satisfac condiţia (3.28). Aşadar, din mulţimea de unde care pot sosi la intrarea în coridor, se vor "filtra" doar acelea care sunt descrise de ecuaţia:

$$\xi = 2A \sin\left(\frac{n\pi}{d} y\right) e^{i(\omega t - k_x x + \pi/2)}. \tag{3.29}$$

Acest rezultat (care apare reprezentat în Fig. 3.7, unde au fost luate în considerare doar cazurile $n = 1, 2$ şi 3) ne arată că entitatea care se propagă de-a lungul "coridorului" care, de fapt, se numeşte *ghid de undă*, este o *undă "staţionară"* (în direcţia y) care satisface relaţia (3.28).

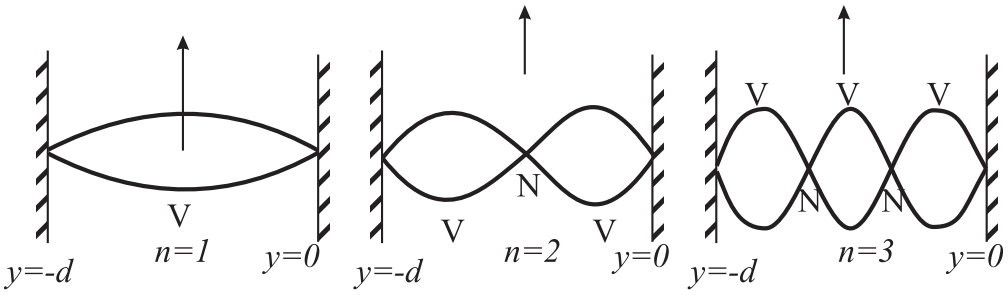

Figura 3.7: Variaţia funcţiei $\sin\left(\frac{n\pi y}{d}\right)$ în funcţie de distanţa y, pentru $n = 1$, 2 şi 3.

Revenind la rolul de filtru al ghidului de unde mecanice, se poate arăta că există o frecvenţă minimă (denumită *frecvenţă de tăiere*) a ghidului, sub care undele nu se mai pot propaga. Într-adevăr, întrucât $k^2 = k_x^2 + k_y^2$, iar $k = \omega/c$, rezultă că:

$$\frac{\omega^2}{v_f^2} = k_x^2 + \frac{n^2\pi^2}{d^2} \tag{3.30}$$

De aici:

$$k_x = \sqrt{\frac{\omega^2}{v_f^2} - \frac{n^2\pi^2}{d^2}} \tag{3.31}$$

Aşadar, prin ghidul de undă se vor propaga doar acele unde, pentru care cantitatea de sub radical este, cel puţin egală cu zero. Frecvenţa de tăiere a ghidului de undă este:

$$\nu_{\min} = \frac{v_f}{2d}, \tag{3.32}$$

unde v_f este viteza de fază a undei în mediul care umple ghidul.

Observaţii: O aplicaţie de importanţă excepţională, în zilele noastre, a propagării undelor prin ghiduri de undă o reprezintă *fibrele optice*. Este adevărat că, în acest caz, este vorba de unde electromagnetice, însă fenomenele sunt întrutotul similare cu cele discutate aici.

Fibra optică, al cărei diametru este, de obicei, de ordinul milimetrului este compusă dintr-un "miez" transparent de indice de refracţie n, învelit de un alt strat transparent de indice de refracţie $n' < n$, astfel încât la interfaţa dintre miez şi înveliş să aibă loc reflexia totală internă a luminii. Sursa de lumină este, de obicei o diodă laser. Reflexia totală şi propagarea prin miez au loc cu pierderi energetice infime, astfel încât unda luminoasă se propagă pe distanţe de ordinul zecilor de km fără nevoia de a fi amplificată.

În plus, deoarece frecvenţa undelor electromagnetice purtătoare a informaţiei (de obicei, binare) prin fibrele optice este de ordinul 10^{14}Hz, numărul de canale de comunicaţie asociată fibrei optice, prin care se transmite simultan informaţia este de ordinul câtorva zeci de mii!

Aceasta este, de altfel, raţiunea înlocuirii cablurilor electrice pentru transmisii de date în Internet (pentru care se pot asigura rate de transmisie de ordinul a 100Mbit/s) cu fibre optice (care asigură rate de transfer de ordinul mai multor Gbit/s).

3.2 Impedanţa specifică de undă. Impedanţa sonoră

În secţiunea anterioară am analizat propagarea unei unde incidente către o suprafaţă care separă două medii cu densităţi diferite. De fapt, aici termenul de "dens" sau "mai puţin dens" nu se referă la densitatea volumică de masă ci la modul în care un mediu opune rezistenţă la preluarea energiei unei unde provenind dintr-un mediu şi transmiterea ei mai departe, într-un solid sau gaz.

Dacă o sursă de oscilaţie va produce, de exemplu, variaţii ale presiunii într-un gaz, particulele mediului se vor pune în oscilaţie, datorită cuplajului cu sursa sau cu particulele înconjurătoare. Amplitudinea şi viteza particulelor mediului cuplat la sursă vor avea valori mici, în cazul unor medii cu impedanţă ridicată şi invers.

Impedanţa de undă se defineşte într-o manieră similară legii lui Ohm: aici diferenţa de potenţial electric este înlocuită cu diferenţa dintre presiunea instantanee (fluctuantă în jurul presiunii statice p_0) şi valoarea p_0. Intensitatea curentului, din legea lui Ohm din electricitate, este aici înlocuită de viteza particulelor, în mişcarea oscilatorie. Impedanţa de undă este definită ca raportul:

$$Z = \left|\frac{p_a}{v_r}\right| = \left|\frac{p_r - p_0}{v_r}\right|. \tag{3.33}$$

Aici p_r şi v_r sunt valorile presiunii instantanee în mediu şi, respectiv, vitezei instantanee a unei particule.

Cum ecuaţia unei unde este:

$$\xi = \xi_m e^{i(\omega t \mp ky)}, \tag{3.34}$$

viteza instantanee a acesteia va fi:

$$v_r = \dot{\xi} = i\omega\xi_m e^{i(\omega t \mp ky)}. \tag{3.35}$$

În cazul unui gaz, de exemplu, am arătat că:

$$p_a = p_r - p_0 = -K_{ad}\frac{\partial \xi}{\partial y} \tag{3.36}$$

unde K_{ad} reprezintă coeficientul adiabatic al gazului, $\left(K = -V\frac{dp}{dV}\right)$. În cazul mediilor condensate, K_{ad} se înlocuieşte cu E (modulul lui Young) în cazul undelor longitudinale în solide, respectiv modulul de compresibilitate în cazul lichidelor.

Aşadar,

$$p_a = \mp K_{ad} ik\xi_m e^{i(\omega t \mp ky)}. \tag{3.37}$$

Relaţia (3.33) devine, atunci:

$$Z = \left|\frac{p_a}{v_r}\right| = \frac{Kk}{\omega} = \frac{K}{v_f}. \tag{3.38}$$

Având în vedere că, în general, viteza de fază este dată de o expresie de tipul $v_f = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$, rezultă că impedanţa de undă a mediului are expresia:

$$Z = \sqrt{\rho v_f}. \tag{3.39}$$

Impedanţa de undă a aerului este $400\frac{\text{Kg}}{\text{m}^2\text{s}}$, a apei de $1,45\times10^6\frac{\text{Kg}}{\text{m}^2\text{s}}$, iar a oţelului de $\approx 4\times10^7\frac{\text{Kg}}{\text{m}^2\text{s}}$.

Propagarea undelor care provin dintr-un mediu în altul se face în condiţii bune dacă impedanţele celor două medii sunt apropiate. În caz contrar, unda transmisă are amplitudine mică, energia incidentă la limita de separaţie dintre cele două medii reflectându-se. Un prim exemplu în acest sens îl constituie propagarea energiei undelor acustice provenite de la bobina unui difuzor către aerul din mediul înconjurător. Rolul membranei difuzorului este acela de a adapta impedanţa ridicată a bobinei oscilante la impedanţa de undă redusă a aerului atmosferic.

Un al 2-lea exemplu, de data aceasta din domeniul undelor electromagnetice îl constituie transformatoarele de adaptare a impedanţei (ridicate) a dipolului unei antene clasice de televiziune la impedanţa (joasă) a cablului coaxial $Z_{cablu} = 75\Omega$ care conduce semnalul recepţionat la intrarea televizorului. Această adaptare are şi în acest caz rolul de a se transfera spre receptorul de televiziune a cât mai mult din energia undei captată de antenă. În condiţiile neadaptării impedanţei antenei cu aceea a cablului coaxial, o fracţiune din energia incidentă se va reflecta spre antenă, nemaiputând fi recepţionată ca un semnal util. Exemple de transformatoare de impedanţă de undă (sonoră) pâlniile vechilor gramofoane, cutiile de rezonanţă ale instrumentelor cu coarde, pâlniile trompetelor etc.

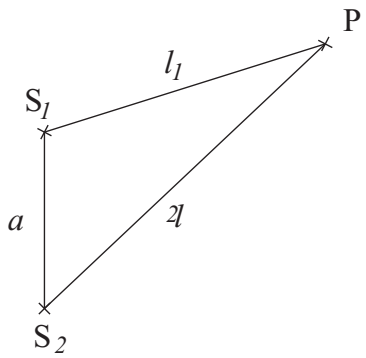

Figura 3.8: O schiţă pentru calculul stări de oscilaţie într-un punct arbitrar, P.

3.3 Interferenţa undelor

În multe cazuri, inclusiv in împrejurări prezentate anterior, starea de oscilaţie a unui punct dintr-un mediu elastic este determinată de suprapunerea efectelor undelor provenind de la două surse de unde. Un exemplu în acest sens se poate concretiza cu mijloace simple în laborator: Pe suprafaţa apei dintr-un vas larg se crează unde circulare folosind un vibrator mecanic cu două piese cilindrice care oscilează pe verticală. O imagine a suprafeţei apei în care sunt create astfel de unde, precum şi rezultatul suprapunerii acestora este prezentată în Fig. 3.8a. În Fig. 2.1b este prezentată o schiţă pe care o vom folosi pentru a determină starea de mişcare a unui punct P de pe suprafaţa apei, situat la distanţele l_1, respectiv l_2 de cele două surse S_1 şi S_2. Dacă sursele oscilează în fază, legile lor de mişcare sunt identice şi anume:

$$\xi_{S_{1,2}} = \xi_{m_{1,2}} \sin(\omega t)\,. \tag{3.40}$$

Dacă punctul P ar fi influenţat, pe rând, de câte o singură undă provenită de la S_1, respectiv S_2, ecuaţiile oscilaţiilor acestuia ar fi:

$$\xi_{1P} = \xi_{m_1} \sin(\omega t - kl_1)\,; \tag{3.41}$$

$$\xi_{2P} = \xi_{m2} \sin(\omega t - kl_2)\,. \tag{3.42}$$

Cum, însă, efectele celor două unde se suprapun, punctul P va oscila conform ecuaţiei:

$$\begin{aligned}\xi_P &= \xi_{m_1} \sin(\omega t - kl_1) + \xi_{m2} \sin(\omega t - kl_2) = \\ &= \xi_{m_1} \sin\omega t \cos kl_1 - \xi_{m_1} \cos\omega t \sin kl_1 + \xi_{m_2} \sin\omega t \cos kl_2 \\ &- \xi_{m_2} \cos\omega t \sin kl_2.\end{aligned} \tag{3.43}$$

Notând acum:

$$\xi_P \sin\theta = \xi_{m_1} \sin kl_1 + \xi_{m_2} \sin kl_2; \tag{3.44}$$

$$\xi_P \cos\theta = \xi_{m_1} \cos kl_1 + \xi_{m_2} \cos kl_2; \tag{3.45}$$

ecuaţia (3.43) se poate scrie şi sub forma:

$$\xi_P = \xi_{mP} \sin(\omega t - \theta), \tag{3.46}$$

în care:

$$\xi_{mP} = \sqrt{\xi_{m_1}^2 + \xi_{m_2}^2 + 2\xi_{m_1}\xi_{m_2} \cos k(l_2 - l_1)}, \tag{3.47}$$

iar

$$\theta = arctg \frac{\xi_{m_1} \sin kl_1 + \xi_{m_2} \sin kl_2}{\xi_{m_1} \cos kl_1 + \xi_{m_2} \cos kl}. \tag{3.48}$$

Constatăm, prin urmare, că punctul P oscilează armonic, după aceeaşi lege de variaţie în timp, ca şi sursele S_1 şi S_2, cu o amplitudine (ξ_{mP}) dependentă de amplitudinile surselor şi de diferenţa de fază (defazaj) între undele (1) şi (2). Un raţionament identic este valabil şi în cazul suprapunerii efectelor undelor electromagnetice, inclusiv în cazul luminii. Deosebirea faţă de undele elastice este aceea că evaluarea stării de oscilaţie (a câmpului electromagnetic rezultat în punctul P) se face prin măsurarea *intensităţii luminoase* şi nu amplitudinii câmpului electromagnetic[3] sunt sensibili la *intensitatea* radiaţiei optice, cu alte cuvinte ei măsoară un semnal proporţional cu R^2..

Dacă cele două surse emit unde circulare de aceeaşi amplitudine ($\xi_{m1} = \xi_{m2} = \xi_m$), atunci ecuaţia (3.47) capătă o formă simplificată:

$$\xi_{mP} = \sqrt{2\xi_m^2 [1 + \cos k(l_2 - l_1)]}. \tag{3.49}$$

Amplitudinea rezultantă va fi maximă (şi egală cu $2\xi_m$) atunci când $\cos k(l_2 - l_1) = 1$, adică atunci când:

$$k\Delta l = 2n\pi \Rightarrow \Delta l = \frac{2n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = n\lambda. \tag{3.50}$$

Amplitudinea rezultantă va fi minimă (şi egală cu 0) când $\cos k(l_2 - l_1) = -1$, adică atunci când:

$$k\Delta l = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta l = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda. \tag{3.51}$$

Dacă S_1, S_2 şi P se găsesc în acelaşi plan, atunci ecuaţiile diferenţei de drum (3.50) şi (3.51) reprezintă ecuaţiile unor locuri geometrice care sunt nişte arce de hiperbolă (Fig. 3.9)[4], care au focarele punctele S_1 şi S_2.

Aşa, de exemplu, maximul de ordin 0 corespunde condiţiei: $\Delta l = l_2 - l_1 = 0$ de unde $l_1 = l_2$. Aşadar, maximul de ordin zero este o dreaptă (se spune că aceasta este un arc de hiperbolă degenerată) care este mediatoarea segmentului S_1S_2.

[3]Detectorii de radiaţie optică (ochiul, hârtia fotografică, receptorii de tip CCD etc

[4]După cum se ştie, hiperbola este locul geometric al punctelor care satisfac condiţia ca diferenţa distanţelor de la ele la alte două puncte fixe (denumite focare) este constantă

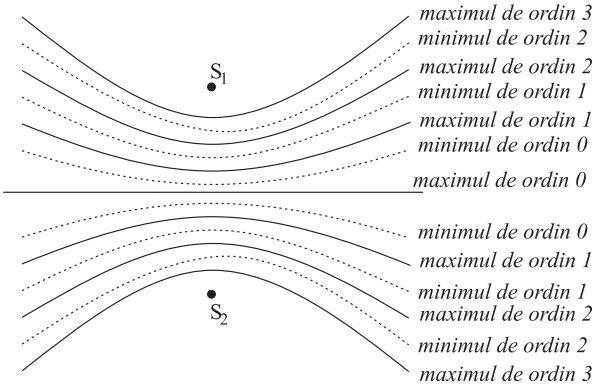

Figura 3.9: Tabloul de interferenţă a două unde circulare.

Maximul de ordin 1 conţine totalitatea punctelor care satisfac condiţia:

$$l_1 - l_2 = \lambda \text{ sau } l_2 - l_1 = \lambda \tag{3.52}$$

Intercalate cu maximele de diverse ordine se vor afla minimele.

Fenomenul de interferenţă constă, prin urmare, în suprapunerea efectelor induse de prezenţa a două unde de aceeaşi frecvenţă într-un punct dat. Observarea interferenţei este uşurată, dacă cele două surse sunt *coerente*, adică au nu numai aceeaşi frecvenţă, dar şi diferenţă de fază constantă. În acest caz starea de oscilaţie a punctului P, aşa cum rezultă din ecuaţiile (3.46)–(3.48) este staţionară, iar efectele se observă mult mai simplu decât dacă undele ce se compun nu ar fi coerente, Afirmaţia precedentă este valabilă şi în cazul interferenţei luminii.

3.4 Difracţia

Am analizat, în secţiunea precedentă, fenomenul de interferenţă. Dacă în loc de două surse, dintr-un punct al mediului în care se propagă unde elastice se compun mai mult de doua unde, vor apărea o serie de rezultate foarte interesante, aşa cum este şi cel al difracţiei.

Să considerăm o experienţă, în care, de exemplu, pe suprafaţa apei dintr-un vas larg sau dintr-un loc se propagă "unde plane", adică suprafeţe de undă formate din "valuri" paralele între ele (Fig. 3.10a). Acest lucru rezultă din această figură, unde am reprezentat suprafeţele de undă în poziţiile succesive ocupate de acesta, la intervale de timp de o perioadă – deci separate prin distanţe egale cu lungimea de undă. Dacă unda incidentă plană se apropie de un ecran, E în care este practicată o deschidere AB, propagarea undelor în spatele ecranului depinde de lărgimea acestei deschideri. Astfel, dacă deschiderea este mult mai largă decât lungimea de undă, în principal, propagarea undelor va avea loc după aceeaşi direcţie ca şi înainte ca acestea să întâlnească ecranul (Fig.3.10a, direcţia (i)). O mică fracţiune din energia transportată de unda incidentă se va propaga, totuşi, şi în spatele ecranului (direcţiile (d)).

Dacă, însă, ecranul are deschiderea AB de dimensiuni comparabile, sau mai mici decât lungimea de undă (Fig. 3.10b) atunci fenomenul dominant este acela în care unda se propagă în direcţii oblice faţă de direcţia undei incidente. Apare, astfel fenomenul cunoscut sub numele

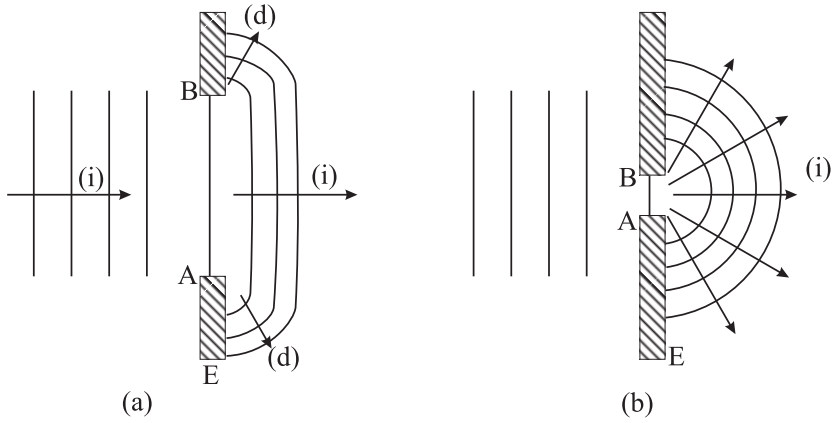

Figura 3.10: Propagarea unei unde plane incidente, în urma trecerii printr-o fantă dreptunghiulară: (a) în cazul unei fante largi (lărgimea fantei mai mare decât lungimea de undă; (b)lărgimea fantei mai mică decât lungimea de undă.

de "difracţie", care aici reprezintă pătrunderea undei difractate *în spatele* ecranului, fenomen care apare, aşa cum vom vedea în cele ce urmează, ca urmare a interferenţei multiple într-un punct a efectelor unui număr foarte mare de unde provenite de la surse multiple. O ilustrare

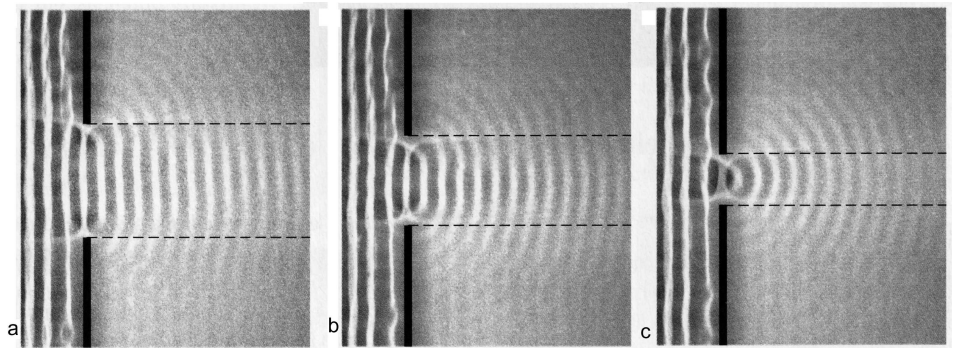

Figura 3.11: Trei imagini ale regimului de propagare a unei unde plane în regiunea din spatele ecranului: (a) în cazul unei fante largi (lărgimea fantei mai mare decât lungimea de undă (b) lărgimea fantei comparabilă cu lungimea de undă; (c)lărgimea fantei mai mică decât lungimea de undă

a acestui tip de comportament este prezentată în imaginea fotografică din Fig.**??**, pentru situaţiile detaliate anterior.

O explicaţie intuitivă simplă a fenomenului rezultă din aplicarea principiului lui Huygens. În orice punct din dreapta ecranului interferă undele provenite de la sursele secundare existente pe suprafaţa de undă care ajunge la nivelul deschiderii (fantei) din ecranul E.

Există două tipuri de difracţie, în funcţie de distanţa dintre centrul fantei şi punctul de analiză a rezultatelor. Noi ne vom ocupa, în cele ce urmează de situaţia în care punctul de analiză se află departe de centrul fantei. Acest tip de difracţie se numeşte *difracţie Fraunhoffer*, spre deosebire de situaţia alternativă, în care analizăm efectele în apropierea fantei. Acest din urmă caz se numeşte *difracţie Fresnel* şi va fi examinată în detaliu la disciplina Optică.

3.4.1 Difracţia Fraunhoffer pe o fantă dreptunghiulară

Să considerăm fanta AB din ecranul E împărţită într-un număr de intervale N, foarte mare. De fapt, cele N puncte dintre A şi B sunt sursele secundare de pe suprafaţa de undă, în momentul în care acesta ajunge la nivelul ecranului, în timpul propagării undei progresive (Fig. 3.12). Să considerăm un punct P foarte departe de centrul O al fantei. Din motive de spaţiu şi de vizibilitate am plasat, (Fig. 3.12) punctul P destul de aproape de fantă, având în vedere lărgimea acesteia. În Fig. 3.12, fanta AB a trebuit să fie reprezentată suficient de largă, din motive de lizibilitate a desenului.

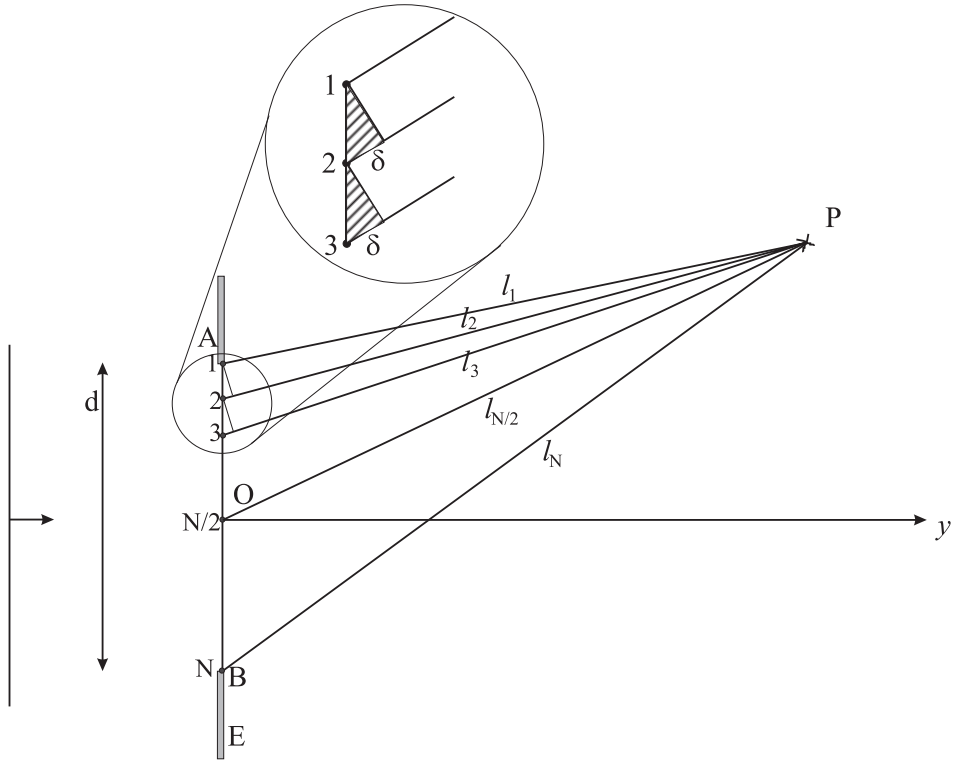

Figura 3.12: Schiţă pentru determinarea stării de oscilaţie a punctului P, ca urmare a interferenţei celor N unde.

Punctul 1 constituie o primă sursă de unde circulare ce se propagă în semi-spaţiul $y > 0$. Ecuaţia undei provenite de la sursa 1, la nivelul punctului P va fi:

$$\xi_{1P} = \xi_m e^{i(\omega t - k l_1)}. \tag{3.53}$$

Considerând că toate cele N surse secundare au aceeaşi amplitudine, atunci, pentru undele ce

sosesc în punctul P, provenind de la celelalte surse secundare de la nivelul fantei vor fi:

$$\xi_{2P} = \xi_m e^{i(\omega t - kl_2)}; \tag{3.54}$$

$$\xi_{3P} = \xi_m e^{i(\omega t - kl_3)}; \tag{3.55}$$

$$\vdots$$

$$\xi_{NP} = \xi_m e^{i(\omega t - kl_N)}. \tag{3.56}$$

Aşa cum rezultă din medalionul din Fig. 3.12, distanţele dintre sursele secundare şi punctul P pot fi scrise prin relaţii de forma:

$$l_2 = l_1 + \delta;\ \ l_3 = l_2 + \delta = l_1 + 2\delta;\ \ldots\ l_N = l_1 + (N-1).\delta$$

în care δ reprezintă diferenţa dintre drumurile străbătut până la punctul P de două unde provenind de la două surse vecine. Cum punctul P este foarte departe de sursele secundare$1, 2, \ldots, N$, "razele" $1 \to P, 2 \to P, N \to P$ sunt, practic, paralele între ele, şi făcând un unghi α cu normala la fantă. Unghiurile $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \ldots$ din vârfurile triunghiurilor haşurate din Fig. 3.13 sunt, de asemenea, egale cu α (ca unghiuri cu laturi perpendiculare), de aceea putem exprima pe δ în funcţie de distanţa $d/(N-1)$ dintre două surse consecutive:

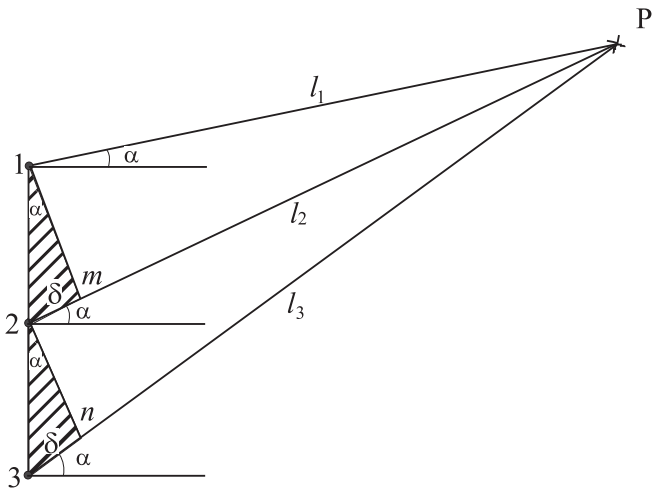

Figura 3.13: Un detaliu al figurii anterioare

$$\delta = \frac{d}{N-1}\sin\alpha \tag{3.57}$$

Revenind la compunerea efectelor celor N unde în punctul P, ecuaţia de mişcare a acestuia în urma suprapunerii efectelor va fi:

$$\xi_P = \xi_m e^{i(\omega t - kl_1)} + \xi_m e^{i[\omega t - k(l_1+\delta)]} + \ldots + \xi_m e^{i\{\omega t - k[l_1+(N-1)\delta]\}},$$

sau:

$$\xi_P = \xi_m e^{i(\omega t - kl_1)} \left[1 + e^{-ik\delta} + e^{-2ik\delta} + \ldots + e^{-2i(N-1)k\delta}\right]. \tag{3.58}$$

Termenii din paranteza pătrată din relaţia precedentă formează o progresie geometrică cu raţia $q = e^{-ik\delta}$. Suma acestei progresii este:

$$S = \frac{1 - q^N}{1 - q}.$$

Ca urmare:

$$\xi_P = \xi_m e^{i(\omega t - kl_1)} \frac{1 - e^{-ikN\delta}}{1 - e^{-ik\delta}}.$$

Având în vedere expresia lui δ din relaţia (3.57), ecuaţia precedentă devine:

$$\xi_P = \xi_m e^{i(\omega t - kl_1)} \frac{1 - e^{\frac{-ikNd\sin\alpha}{N-1}}}{1 - e^{\frac{-ikd\sin\alpha}{N-1}}}.$$

Cum $N \gg 1$, putem scrie că $N \approx N - 1$, deci N şi $N - 1$ din fracţia ce apare în exponentul cantităţii de la numărătorul ecuaţiei precedente se simplifică. Scoţând, pe de altă parte, în factor comun, forţat termenii ce apar la numărător şi la numitor în ecuaţia următoare:

$$\xi_P = \xi_m e^{i(\omega t - kl_1)} \frac{e^{-i\frac{kd\sin\alpha}{2}} \left(e^{i\frac{kd\sin\alpha}{2}} - e^{-i\frac{kd\sin\alpha}{2}}\right)}{e^{-i\frac{kd\sin\alpha}{2(N-1)}} \left(e^{i\frac{kd\sin\alpha}{2(N-1)}} - e^{-i\frac{kd\sin\alpha}{2(N-1)}}\right)},$$

constatăm că putem scrie o relaţie simplificată a lui ξ_P sub forma:

$$\xi_P = \xi_m e^{i(\omega t - kl_1)} e^{-i\frac{kd\sin\alpha}{2}\left(1 - \frac{1}{N-1}\right)} \frac{\sin\frac{kd\sin\alpha}{2}}{\sin\frac{kd\sin\alpha}{2(N-1)}}.$$

Având în vedere că N este un număr foarte mare, $\sin\frac{kd\sin\alpha}{2(N-1)} \approx \frac{kd\sin\alpha}{2N}$, iar $1 - \frac{1}{N-1} \approx 1$. Ca urmare:

$$\xi_P \approx N\xi_m e^{i\left(\omega t - kl_1 - \frac{kd\sin\alpha}{2}\right)} \frac{\sin\frac{kd\sin\alpha}{2}}{\frac{kd\sin\alpha}{2}}. \tag{3.59}$$

Notând:

$$\frac{kd\sin\alpha}{2} = \theta$$

şi rearanjând termenii din ecuaţia (3.59) avem:

$$\xi_P = N\xi_m \frac{\sin\theta}{\theta} e^{i\left[\omega t - k\left(l_1 + \frac{d\sin\alpha}{2}\right)\right]}.$$

Cum, însă, conform ecuaţie (3.57), $d\sin\alpha \approx N\delta$:

$$\xi_P = N\xi_m \frac{\sin\theta}{\theta} e^{i\left[\omega t - k\left(l_1 + \frac{N}{2}\delta\right)\right]}. \tag{3.60}$$

Observăm, din Fig. 3.12, că $l_1 + \frac{N}{2}\delta = l_{N/2} = OP = l_{mediu}$. Ca urmare:

$$\xi_P = N\xi_m \frac{\sin\theta}{\theta} e^{i[\omega t - k l_{mediu}]}. \tag{3.61}$$

Aşadar, punctul P execută o mişcare oscilatorie, a cărei amplitudine:

$$\xi_{mP} = N\xi_m \frac{\sin\theta}{\theta}, \tag{3.62}$$

este modulată cu funcţia $\frac{\sin\theta}{\theta}$. Este cunoscut că această funcţie are un maxim atunci când $\theta = 0$:

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

urmat de maxime şi minime secundare, aşa cum rezultă din Fig. 3.14, la valorile lui θ de ... respectiv ... Putem spune, în concluzie, că maximul de ordin 0 de difracţie apare pe direcţia

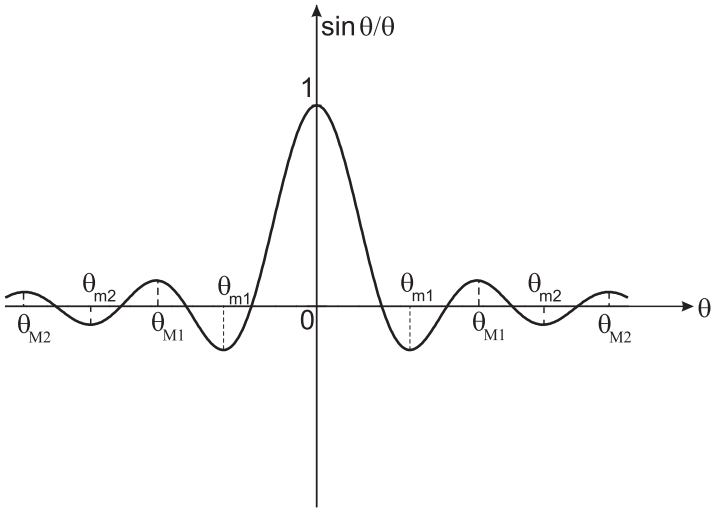

Figura 3.14: Graficul funcţiei $\frac{\sin\theta}{\theta}$.

de propagare a undelor incidente pe ecranul E, iar maximele şi minimele de difracţie de ordine superioare vor apărea la unghiurile care rezultă din Fig. 3.14.

Intensitatea undei difractate ce ajunge în punctul P este proporţională cu pătratul amplitudinii ξ_{mP}, aşa încât intensitatea undei care se propagă într-o direcţie ce face un unghi α arbitrar cu normala la fantă este data de relaţia:

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2. \tag{3.63}$$

Minimele de difracţie apar în direcţiile în care

$$\theta = n\pi \text{ (cu } n = 1, 2, 3 \dots). \tag{3.64}$$

Cum $\theta = \frac{kd \sin\alpha}{2}$, rezultă că minimele apar în direcţiile în care $2\pi n = kd \sin\alpha$, sau $2\pi n = \frac{2\pi}{\lambda} \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = n\lambda$. Maximele de difracţie de ordin superior se afla aproximativ la jumătatea distanţelor dintre două minime consecutive. Ca urmare, folosind ecuaţia (3.64):

$$\theta \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi,$$

iar intensitatea într-un astfel de maxim secundar va fi dată de o relaţie de forma:

$$I = I_0 \left[\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}\right]^2 = \frac{I_0}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}. \tag{3.65}$$

Făcând pe n sa ia valorile $1, 2, 3, \dots$ vom găsi ca intensităţile maximelor de ordin $1, 2, 3, \dots$ reprezintă respectiv 4,5%, 1,6%, 0,83% din intensitatea maximului principal.

Trebuie, de asemenea, remarcat că semi-lărgimea (intervalul unghiular în care intensitatea scade la jumătate din valoarea sa maximă) este invers proporţională cu lungimea de undă şi direct proporţională cu lărgimea, d, a fantei.

3.5 Dispersia undelor. Viteza de grup

În exemplele anterioare am analizat propagarea undelor elastice în medii omogene şi am găsit că, pentru fiecare tip de undă şi fiecare mediu, viteza are altă expresie: $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ într-o coardă, $v = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}$ într-un fluid. K are semnificaţii diferite în funcţie de tipul de mediu şi de caracterul undei (longitudinală sau transversală).

Există, însă, exemple de medii în care undele se propagă cu *viteze care sunt funcţii şi de lungimea lor de undă* $[v = v(\lambda)]$. Astfel de medii se numesc *dispersive*. De exemplu, viteza undelor capilaro-gravitaţionale pe suprafaţa unui lichid de densitate ρ, adâncime h şi coeficient de tensiune superficială σ, este:

$$v = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho}\right) \operatorname{tgh}(hk)} \tag{3.66}$$

Aici g este acceleraţia gravitaţională, $k = 2\pi/\lambda$ este numărul de undă, iar funcţia trigonometrică de sub radical este tangenta hiperbolică:

$$\operatorname{tgh}(hk) = \frac{e^{hk} - e^{-hk}}{e^{hk} + e^{hk}}. \tag{3.67}$$

Este evident că o undă armonică (de exemplu, una sinusoidală) se va propaga în acelaşi mod într-un mediu dispersiv, ca şi într-unul nedispersiv. Ar fi, însă mai interesant, să examinăm fenomenele care apar dacă *un grup de unde* compus din unde de diferite lungimi de

undă se propagă printr-un mediu dispersiv. Un interes deosebit în fizică îl prezintă studiul propagării unei suprapuneri de unde sinusoidale având frecvenţele cuprinse într-un interval îngust de frecvenţe. Unda rezultantă din suprapunerea sus-menţionată (numărul de componente sinusoidale poate fi oricât de mare - important e ca intervalul $\nu_{\max} - \nu_{\min}$ să fie finit şi mic) se numeşte *pachet de unde*.

Să examinăm cazul cel mai simplu, acela în care într-un pachet de unde progresive există doar două unde de frecvenţe apropiate, ω_1 şi ω_2. Cu alte cuvinte:

$$\xi_1 = \xi_m \sin(\omega_1 t - k_1 y); \tag{3.68}$$

$$\xi_2 = \xi_m \sin(\omega_2 t - k_2 y); \tag{3.69}$$

în care $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}$, $k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$.

Într-un punct al mediului în care efectele celor două unde se suprapun, elongaţia rezultantă va fi:

$$\xi(y,t) = \xi_1 + \xi_2 = 2\xi_m \sin\left[\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t - \frac{k_1+k_2}{2}y\right] \cos\left[\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t - \frac{k_1+k_2}{2}y\right]. \tag{3.70}$$

Termenul sinusoidal din (3.70) reprezintă o undă ale cărei pulsaţii şi numere de undă reprezintă valorile medii aritmetice ale undelor ξ_1 şi ξ_2 şi a cărei viteză este $(\omega_1+\omega_2)/(k_1+k_2)$. Întrucât pulsaţiile ω_1 şi ω_2 sunt foarte apropiate, pulsaţia undei sus-menţionate este foarte apropiată de ω_1 şi ω_2; la fel stau lucrurile şi cu numerele de undă. Ca urmare, unda rezultantă va avea faza practic egală cu faza undelor (3.68) şi (3.69).

Termenul cosinusoidal din ecuaţia (3.70) descrie o undă de pulsaţie şi număr de undă egale cu semi-diferenţele pulsaţiilor, respectiv numerele de undă a undelor descrise de ecuatia (3.68) şi (3.69). Aceasta undă are viteza de propagare a fazei$(\omega_1 - \omega_2)/(k_1 - k_2)$, un termen care variază mult mai lent în timp şi în spaţiu decât termenul sinusoidal.

În Fig. 3.15(a) este reprezentată grafic dependenţa de y a termenului sinusoidal din (3.70), pentru un moment dat, t. În Fig. 3.15(b) este reprezentată dependenţa de y a termenului cosinusoidal din aceeaşi relaţie. În sfârşit, în Fig. 3.15(c) este prezentată dependenţa $\xi(y,t)$ pentru o valoare oarecare a lui t. Se observă, de altfel, rezultatul cunoscut sub denumirea de *bătăi* (atenţie, în acest caz, bătăi în spaţiu!).

Se întrevede din relaţia (3.70) că, dacă îl fixăm pe y, adică dacă ne referim la un punct dat al mediului, vom obţine o undă modulată similară cu cea din Fig. 3.15(c). Avem, în acest caz un fenomen de *bătăi în timp*.

Într-un mediu nedispersiv, viteza de fază a oricărei unde (indiferent de λ) este constantă. Aceasta înseamnă, nu numai că:

$$v = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2}, \tag{3.71}$$

dar şi că (construind proporţii derivate):

$$v = \frac{\omega_1+\omega_2}{k_1+k_2} = \frac{\omega_1-\omega_2}{k_1+k_2}. \tag{3.72}$$

Cu alte cuvinte, termenii sinusoidali şi cosinusoidali au aceeaşi viteză de fază, astfel încât curba continuă şi anvelopa punctată din Fig. 3.15(c) se vor propaga în timp spre dreapta (fiind vorba

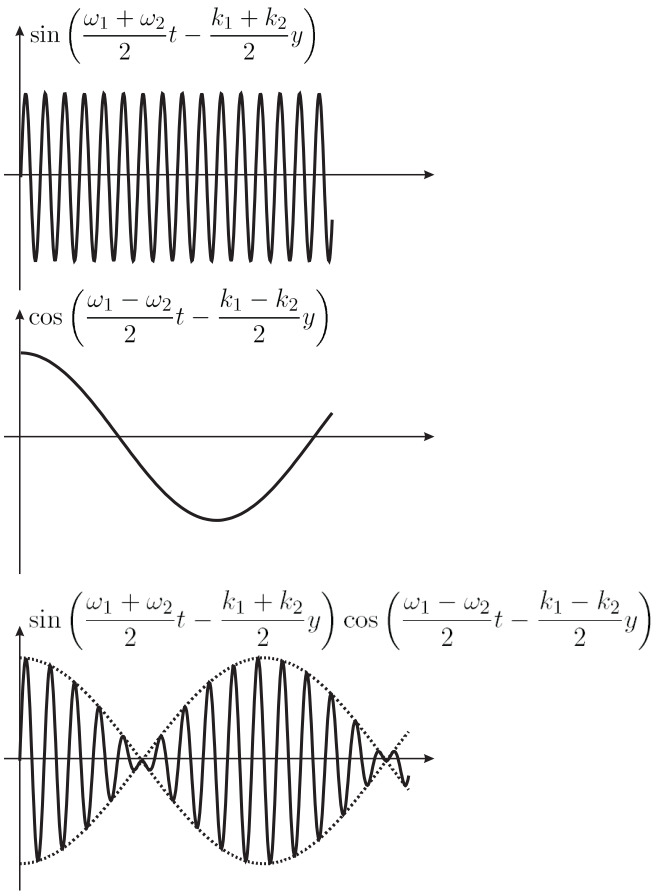

Figura 3.15: Superpoziţia, la un moment arbitrar, t, a două unde de pulsaţii apropiate: a) termenul sinusoidal; b) termenul cosinusoidal; c) efectul superpoziţiei.

de unde progresive). Aceasta înseamnă că *un semnal care se propagă într-un mediu nedispersiv nu îşi modifică forma.*

Să examinăm acum propagarea unui pachet de două unde sinusoidale (3.70) într-un mediu *dispersiv.* În acest caz, întrucât $v_1 \neq v_2$, rezultă că:

$$\frac{\omega_1}{k_1} \neq \frac{\omega_2}{k_2} \text{ şi } \frac{\omega_1+\omega_2}{k_1+k_2} \neq \frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2}.$$

În acest caz curba rezultantă (reprezentată cu linie continuă în Fig. 3.15(c)) şi anvelopa ei (reprezentată cu linie întreruptă în aceeaşi figură) se deplasează cu viteze diferite în timp.

În cele mai multe dintre situaţiile întâlnite în fizică anvelopa se mişcă mai lent decât curba continuă:

$$\frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2} < \frac{\omega_1+\omega_2}{k_1+k_2}, \tag{3.73}$$

de aceea aceste cazuri sunt denumite ca fiind exemple de *dispersie normală*[5]

Există şi un număr de exemple în care anvelopa se mişcă mai rapid decât unda rezultantă:

$$\frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2} > \frac{\omega_1+\omega_2}{k_1+k_2},$$

caz în care *dispersia* se numeşte *anomală.* Exemple de acest tip se întâlnesc la propagarea undelor transversale printr-o bară elastică, sau în cazul propagării undelor electromagnetice în apropierea *limitei de absorbţie*[6]

Trebuie menţionat că, *viteza de propagare a energiei* transportată de undă *este egală cu viteza de propagare în spaţiu a maximului amplitudinii.* În cazul unui mediu nedispersiv, viteza de transport a energiei este egală, evident, cu viteza de fază a undei, (vezi ecuaţia (3.72)). În cazul propagării unui pachet de unde, deci a energiei, viteza de transport a energiei este egală cu *viteza de propagare* în spaţiu *a anvelopei.*

Aşadar, energia transportată de un pachet de unde se propagă cu o viteză, notată v_g şi numită *viteză de grup.* Expresia acesteia este:

$$v_g = \frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2} \approx \frac{d\omega}{dk}, \tag{3.74}$$

întrucât cele două pulsaţii, ca şi numerele de undă asociate sunt foarte apropiate.

Între vitezele de grup şi de fază există o relaţie (denumită relaţia lui Rayleigh). Aceasta se obţine din ecuaţia (3.74), în care înlocuim pe ω şi k:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi v_f}{v_f T} = \frac{2\pi v_f}{\lambda}$$
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

[5]Un exemplu de acest caz îl constituie undele pe suprafaţa mării, la adâncime, h, mare, acolo unde termenul al 2-lea din paranteza ecuaţiei (3.66) se neglijează.

[6]Acest al 2-lea exemplu va fi studiat în detaliu în cadrul cursului de electrodinamică.

Ca urmare:

$$v_g = \frac{d\left(\frac{2\pi v_k}{\lambda}\right)}{d\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)} = \frac{\frac{\lambda dv_f - v_f d\lambda}{\lambda^2}}{-\frac{1}{\lambda^2}d\lambda}$$

adică

$$v_g = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda}. \tag{3.75}$$

Pe cale grafică, viteza de grup se determină folosind un procedeu bazat pe Fig. 3.16. Aici am reprezentat dependenţa vitezei de fază de lungimea de undă, în cazul unui mediu dispersiv (dispersie normală). La o valoare dată a lungimii de undă, $\lambda = \lambda_A$, viteza de fază a undei are valoarea $v(\lambda_A)$. Tangenta grafică în A face cu axa absciselor unghiul α:

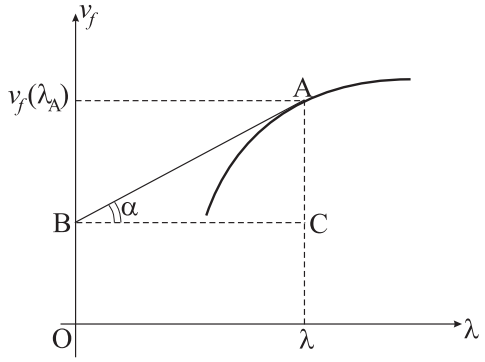

Figura 3.16: Determinarea vitezei de grup la o valoare anumită a lungimii de undă folosind relaţia lui Rayleigh (3.75).

$$\mathrm{tg}\alpha = \left.\frac{dv_f}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_A} = \frac{AC}{BC}. \tag{3.76}$$

Putem scrie, referindu-ne la Fig. 3.16, că:

$$AC = v_f - OB, \text{ iar } BC = \lambda_A,$$

astfel încât:

$$\left.\frac{dv_f}{d\lambda}\right|_{\lambda_A} = \frac{v_f - OB}{\lambda_A}$$

de unde:

$$OB = v_f - \lambda_A \left.\frac{dv_f}{d\lambda}\right|_{\lambda_A}. \tag{3.77}$$

Cu alte cuvinte, $OB = v_g$. Aşadar, viteza de grup, a unor pachete de undă "centrate" în jurul lungimii de undă λ_A este egală cu ordonata la origine OB.

În concluzie, un pachet de unde armonice indiferent de numărul de componente, se va propaga într-un mediu dispersiv fără să-şi modifice forma în spaţiu. Un pachet de unde armonice având un spectru cu mai mult de o componentă spectrală îşi va modifica profilul spaţial într-un mediu dispersiv, întrucât componentele sale se propagă cu viteze diferite.

3.6 Efectul Doppler

Efectul Doppler[7] constă în perceperea unei *frecvenţe diferite* decât cea reală (a undei emise de o sursă), atunci când receptorul se află în mişcare relativă faţă de sursă. Relaţia care exprimă legătura dintre frecvenţa reală a undelor emisă de sursă şi cea măsurată de receptor diferă atunci când *sursa este mobilă* şi receptorul fix şi, respectiv, *receptorul este mobil*, iar sursa fixă. Să examinăm cele două cazuri, în cazul propagării undelor elastice după o direcţie dată.

3.6.1 Sursa mobilă, observator fix

Să considerăm că sursa este mobilă, la momentul $t_0 = 0$ ea aflându-se în punctul S_0 (Fig. 3.17). Să analizăm rezultatele măsurătorilor unui observator (receptor) fix, aflat în punctul R. Observatorul fiind observator fix, în cazul unei surse aflate în mişcare. Dacă la acel moment sursa începe să emită unde sferice şi dacă convenim să discutăm despre suprafeţe de undă generate la fiecare perioadă T (separate spaţial prin distanţa λ), atunci lucrurile se prezintă astfel: Unda emisă la momentul t_0 va avea un front de undă de forma unei suprafeţe sferice cu centrul în S_0.

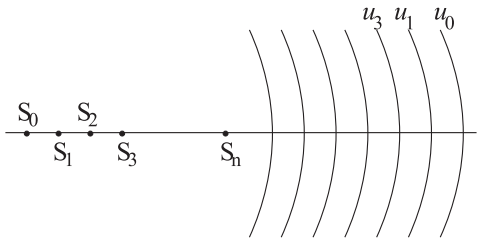

Figura 3.17: Efectul Doppler perceput de un observator fix, în cazul unei surse aflate în mişcare.

Unda emisă după o perioadă T, va fi o suprafaţă sferică cu centrul în S_1, cea emisă după $2T$ va avea centrul în S_2, etc. Aici $S_0S_1 = S_1S_2 = \ldots = v_fT = \lambda$ (v_f este viteza de fază a undei în mediul considerat). Se presupune că, în momentul în care unda (u_0) a ajuns la receptorul R, sursa se află în punctul S_n. Distanţele parcurse de unda (u_0) şi, respectiv sursa S vor fi:

$$S_0R = v_ft \text{ şi } S_0S_1 = v_st. \tag{3.78}$$

În timpul t au fost emise n unde $\left(n = \frac{t}{T}\right)$. Constatăm că, în intervalul spaţial S_nR se "aglomerează" toate cele n unde emise de sursă în intervalul de timp t. Lungimea de undă aparentă în zona din faţa sursei va fi, prin urmare:

$$\lambda_a = \frac{S_nR}{n} = \frac{(v_f - v_s)t}{t}T = (v_f - v_s)T. \tag{3.79}$$

[7]Johann Christian Andreas Doppler (1803–1853) matematician si fizician austriac, devenit celebru pentru explicarea efectului care îi poartă numele.

Frecvenţa aparentă, măsurată de receptorul R va fi:

$$\nu_a = \frac{v_f}{\lambda_a} = \frac{v_f}{(v_f - v_s)T} = \frac{v_f}{v_f - v_s}\nu. \tag{3.80}$$

Constatăm ca frecvenţa aparentă, ν_a, măsurată de observatorul R este mai mică decât cea reală, ν. Diferenţa este cu atât mai mare cu cât viteza sursei este mai apropiată de viteza de fază a undei în acel mediu. La limită, atunci când $v_s = v_f$, $\nu_a = 0$. Aceasta se întâmplă, de exemplu, atunci când sursa se mişcă cu viteza sunetului.

Atunci $S_1R = 0$, iar sursa se va afla în permanenţă pe frontul de undă, toate fronturile undelor $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ fiind tangente în locul în care se găseşte sursa (vezi Fig. 3.18)

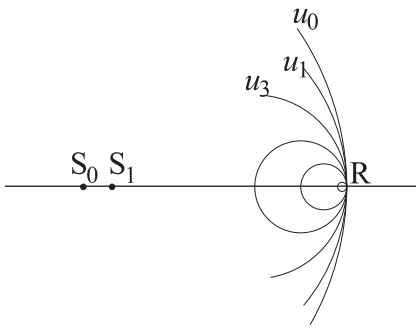

Figura 3.18: Forma fronturilor de undă în cazul unei surse care se deplasează cu viteza egală cu cea a undei.

Observaţie: Dacă sursa de unde se deplasează cu o viteză $v_s > v_f$, atunci ea se va afla în permanenţă în afara (în faţa) fronturilor de undă generate în momentele anterioare (Fig. 3.19).

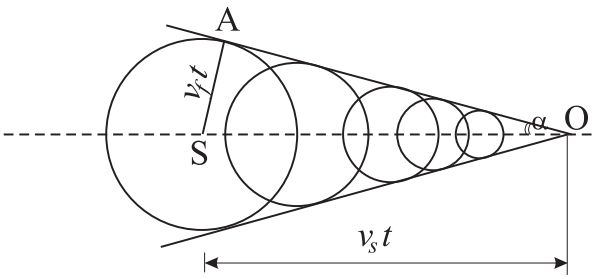

Figura 3.19: Forma frontului de undă al unei unde emise de o sursă care se deplasează cu o viteză mai mare decât viteza de fază a undei.

Aceste fronturi de undă sunt tangente interioare unui con, denumit conul lui Mach[8].

Unghiul α din triunghiul dreptunghic SAO se află folosind relaţia:

$$\sin\alpha = \frac{SA}{SO} = \frac{v_f t}{v_s t} = \frac{v_f}{v_s}. \tag{3.81}$$

[8]Erwin Mach – fizician austriac, care a obţinut o serie de rezultate remarcabile într-o serie de domenii ale fizicii, în special în mecanica fluidelor

Evident, conul lui Mach va fi cu atât mai ascuţit cu cât v_s este mai mare decât v_f. Odată cu scăderea lui v_s, deschiderea α a conului se micşorează, iar când v_s devine egal cu v_f, conul degenerează într-un plan ce conţine şi punctul O ($\alpha = 90^o$). Regăsim astfel rezultatul prezentat în Fig. 3.18.

Pentru a calcula frecvenţa aparentă, ν'_a, măsurată de un alt receptor plasat în regiunea din spatele sursei (acolo unde sursa se îndepărtează de observator), vom urma un raţionament similar cu cel anterior. Evident, rezultatul se obţine uşor dacă înlocuim în relaţia (3.80) pe v_s cu $-v_s$. Aşadar:

$$\nu'_a = \frac{v_f}{v_f + v_s}\nu. \tag{3.82}$$

Cu alte cuvinte, observatorul faţă de care *sursa se îndepărtează* va măsura o frecvenţă *mai mică* decât cea reală.

Am observat cu toţii efectul Doppler acustic, atunci când pe lângă noi trece un automobil claxonând sau o locomotivă cu sirena în funcţiune. Efectul cel mai spectaculos are loc atunci când sursa de sunet ajunge în dreptul nostru, moment în care are loc o scădere bruscă a frecvenţei sunetului perceput, de la valoarea ν_a la ν'_a:

$$\Delta\nu_a = \nu_a - \nu'_a = \frac{2v_f v_s \nu}{v_f^2 - v_s^2}. \tag{3.83}$$

Observaţii: Efectul Doppler în care sursa este în mişcare se foloseşte pentru măsurarea vitezei unor fluide. De exemplu, măsurarea vitezei sângelui printr-o arteră se face măsoară folosind tehnica denumită *velocimetrie Doppler*: Un generator de unde ultrasonore plasat în vecinătatea vasului de sânge emite unde după o direcţie aproape paralelă cu direcţia de curgere a sângelui (de-a lungul vasului). Particulele constituente ale sângelui reflectă undele ultrasonore, comportându-se ca o sursă virtuală care se îndepărtează de receptorul plasat în imediata vecinătate a sursei de ultrasunete[9].

Măsurând frecvenţa ν'_a a semnalului reflectat, se poate determina viteza sângelui, v_s, şi debitul volumic al acestuia prin artera respectivă.

3.6.2 Sursa fixă, receptor aflat în mişcare

Sa presupunem (Fig. 3.20) că sursa este în repaus în punctul S_0 şi că emite unde în mod permanent. Suprafeţele de undă vor fi acum *sfere concentrice* cu centrul în S_0. Să presupunem că la momentul $t_0 = 0$ este emisă unda u_0. Frontul de undă a lui u_0 se va întâlni în punctul R_1 la momentul t_1, cu observatorul care plecase, la $t_0 = 0$, din poziţia R_0. Distanţa $d = S_0R_0$ se compune atunci din distanţele parcurse de undă cu viteza v_f şi observator cu viteza v_R:

$$d = v_f t_1 + v_R t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{d}{v_f + v_R}. \tag{3.84}$$

[9]De multe ori, generatorul de ultrasunete (o plăcuţă dintr-un material piezoelectric) funcţionează succesiv ca generator, apoi ca receptor al undelor ultrasonore reflectate (efectul piezoelectric este reversibil)

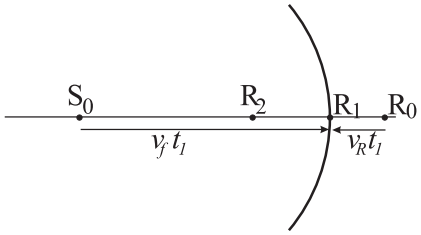

Figura 3.20: Efectul Doppler în cazul în care sursa S este fixă şi receptorul în mişcare.

Unda următoare va fi emisă de sursă după un interval T. Condiţia de întâlnire pentru a doua undă cu observatorul va fi:

$$d = v_f(t_2 - T) + v_R t_2, \tag{3.85}$$

adică această a doua întâlnire va avea loc la momentul:

$$t_2 = \frac{d + v_f T}{v_f + v_R}. \tag{3.86}$$

Perioada (aparentă) măsurată de receptorul R va fi atunci intervalul perceput de acesta între două unde "consecutive" :

$$T_a = t_2 - t_1 = \frac{v_f T}{v_f + v_R}. \tag{3.87}$$

Frecvenţa măsurată de receptor, ν_a'', va fi:

$$\nu_a'' = \frac{1}{T_a} = \frac{v_f + v_R}{v_f}\nu. \tag{3.88}$$

Judecând, într-o manieră similară, cazul în care receptorul *se îndepărtează* de sursă (v_R trecând în $-v_R$), vom obţine:

$$\nu_a''' = \frac{v_f - v_R}{v_f}\nu. \tag{3.89}$$

Restrângând rezultatele obţinute în cele două cazuri când sursa este în mişcare [ecuaţiile (3.80) şi (3.82)] şi când receptorul este în mişcare [ecuaţiile (3.88) şi (3.89)], vom putea scrie o relaţie sintetică de forma:

$$\nu_a = \frac{v_f \pm v_R}{v_f \mp v_s}\nu, \tag{3.90}$$

în care semnele de deasupra se referă la apropierea relativă a sursei de receptor şi invers.

Observaţii:

1. Există încă multe alte aplicaţii ale efectului Doppler. În zilele noastre predicţia meteorologică a devenit mult mai precisă prin măsurarea (folosind radare Doppler) a vitezei curenţilor de aer din atmosferă.

2. Deşi se bazează pe o argumentaţie teoretică diferită, efectul Doppler apare şi in cazul undelor electromagnetice, inclusiv a celora din domeniul optic[10]. Este interesant că formule identice pentru frecvenţa aparentă măsurată de observator se găsesc şi în cazul undelor electromagnetice. Acest lucru face să putem măsura, de exemplu, viteza cu care o stea oarecare se îndepărtează de Pământ. De asemenea, se poate determina viteza din mişcarea dezordonată a unor atomi ce formează un ansamblu statistic în echilibru termodinamic, dacă aceştia emit lumină prin procese de dezexcitare.

3. În cazul în care direcţia de deplasare a sursei face un unghi α cu dreapta S_0R, în relaţiile (3.80) şi (3.82) v_s va fi înlocuit cu $v_s \cos\alpha$, adică cu componenta vitezei paralelă cu S_0R. Componenta vitezei v_s după o direcţie perpendiculară pe S_0R nu produce o deplasare relativă între sursă şi receptor. În cazul acesta, frecvenţa determinată de receptor ca fi:

$$\nu_a = \frac{v_f}{v_f \mp v_s \cos\alpha}.$$

Efectul Doppler, aşa cum a fost descris anterior se mai numeşte şi efect *Doppler clasic longitudinal*.

3.7 Absorbţia undelor elastice

În procesul de propagare a undelor prin medii reale, o parte din energia mecanică transportată de undă se transformă în alte forme de energie, cel mai comun caz fiind acela în care se produce căldură.

Cum energia transportată de o undă este proporţională cu pătratul amplitudinii undei, ne aşteptăm ca amplitudinea să scadă proporţional cu distanţa parcursă de undă ($d\xi_m \sim y$). Procesul de disipare a energiei este din ce în ce mai slab, o dată cu scăderea amplitudinii (de aceea putem scrie că $d\xi_m \sim \xi_m$). În sfârşit, rata de descreştere a elongaţiei undei (şi, implicit a energiei mecanice) depinde de tipul de mediu în care are loc propagarea şi de fenomenele fizice care conduc la disiparea energiei. Prin urmare:

$$d\xi_m = -\lambda \xi_m dx, \tag{3.91}$$

în care $d\xi_m$ este scăderea amplitudinii pe o distanţă elementară parcursă, dx. Termenul λ denumită constanta de atenuare a amplitudinii, caracterizează mediul, cât şi procesele care conduc la absorbţia energiei mecanice.

Relaţia (3.91) se poate scrie şi sub forma:

$$\frac{d\xi_m}{\xi_m} = -\lambda dx. \tag{3.92}$$

Dacă ξ_{m0} este amplitudinea undei la intrare într-un strat absorbant şi $\xi_m(x)$ este amplitudinea după parcurgerea distanţei x prin acest strat, prin integrarea ecuaţiei (3.92) găsim:

$$\xi_m(x) = \xi_m(0) e^{-\lambda x}. \tag{3.93}$$

[10] În cazul undelor electromagnetice, compunerea vitezelor se face în mod diferit decât în mecanica clasică, aşa cum se va studia în cadrul cursului de Electrodinamică şi teoria relativităţii.

Aşadar, amplitudinea undei descreşte exponenţial ca urmare a absorbţiei. Se defineşte o *lungime de atenuare* $\chi = \frac{1}{\lambda}$, care înseamnă distanţa pe care trebuie să o parcurgă unda pentru ca amplitudinea să descrească de e ori. Având în vedere că intensitatea undei este proporţională cu ξ_m^2, o relaţie între intensităţi se obţine din relaţia (3.93) sub forma:

$$I(x) = I(0)e^{-2\lambda x}. \tag{3.94}$$

Aici coeficientul 2λ se numeşte *coeficient de absorbţie* al undei într-un mediu. Coeficientul de absorbţie sonoră în mediile condensate este funcţie de frecvenţă, de conductivitatea termică a mediului şi de vâscozitate.

3.8 Probleme

1. Într-un cutremur de Pământ apar două tipuri de unde: de tip S (unde transversale, de suprafaţă, similare celor de la suprafaţa apei) şi de top P (longitudinale, care se propagă prin scoarţa terestră). Să presupunem că în punctul A se produce un cutremur care este înregistrat de un seismograf plasat în B. Punctele A şi B sunt situate pe aceeaşi longitudine de 60^0. Viteza de propagare a undelor S este de $v_S = 4.5$Km/s iar a celor P este de $v_P = 7.8$Km/s. (a) Care dintre cele două unde este recepţionată mai întâi? (b) Care esre diferenţa de timp după care sunt detectate cele două tipuri de unde? Se consideră raza Pământului $R_P = 6370$Km.

   Răspuns: $\Delta t = \frac{2R\sin 30^0}{v_S} - \frac{R\pi/3}{v_P} = 11,1\,\text{min}\,.$

2. O undă transversală sinusoidală cu perioada $T = 25$ms se deplasează în direcţia negativă a axei Ox, cu viteza $v = 30$ m/s. La momentul $t = 0$, o particulă a mediului, de la poziţia $x = 0$ este deplasată cu 2 cm şi se deplasează în jos cu viteza de 2m/s. Să se determine:

   (a) amplitudinea undei;

   (b) faza iniţială;

   (c) viteza transversală maximă;

   (d) ecuaţia undei.

   Răspuns: $A = 0,021m; \phi = 1,95rad; v_{y,\max} = 5,41m/s.$

3. Viteza undelor transversale ce apar într-o coardă tensionată de $T = 6,00N$ este $v = 20m/s$.Ce forţă de tensiune este necesară pentru a obţine o undă cu viteza $v = 30m/s$?

   Răspuns: $T_2 = \left(\frac{v_2}{v_1}\right) T_1 = 13,5N.$

4. Un fir din oţel cu lungimea de 30m şi un fir din cupru de 20m, ambele având acelaşi diametru de 1mm sunt lipite unul de altul şi supuse unei tensiuni de 150N. În cât timp unda transversală ajunge de la un capăt la altul al firelor?

   Răspuns: $t = 0,329s.$

5. O undă are expresia:

$$y(x,t) = (0,350m)\sin(10\pi t - 3\pi x + \pi/4)$$

Determinaţi:

(a) rata medie a energiei transmise de-a lungul corzii, dacă densitatea liniară demasă este de 75g/m.

(b) energia corespunzătoare fiecărui ciclu al undei.

Răspuns: (a) $P = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v = 15,1W; (b) E = PT = 3,02J$

6. Un fir de densitate ρ are secţiunea variabilă conform relaţiei:

$$A = (10^{-3}x + 0,01)cm^2.$$

Găsiţi viteza de deplasare a unei unde transversale generate de o tensiune $T = 24N$ în punctele $x = 0$ şi $x = 10cm$.

Răspuns: $v(x = 0) = 5,41m/s; v(x = 10) = 66,7m/s$.

7. O coardă a unui instrument muzical este supusă unei tensiuni T. Coarda este înfâşurată cu un alt fir astfel încât masa pe unitatea de lungime, $\mu(x)$ creşte uniform de la valoarea $\mu(x = 0) = \mu_0$ la $\mu(L = 0) = \mu_L$.

(a) Găsiţi expresia lui $\mu = \mu(x)$;

(b) Arătaţi că timpul necesar unui puls transversal să traverseze coarda este: $\Delta t = 2L\left(\mu_L + \mu_0 + \sqrt{\mu_L\mu_0}\right) / \left[3\sqrt{T}\left(\sqrt{\mu_L} + \sqrt{\mu_0}\right)\right]$.

(c) Nivelul sonor la distanţa de 3m de sursă este de 120dB. La ce distanţă nivelul sonor va fi de: (i)100 dB; (ii) 10 dM:

Răspuns: $\beta = 10\lg\left(I/10^{-12}\right); P = 4\pi r^2 I; r_1^2 I_1 = r_2^2 I_2; (a)30m;\ (b)9,49 \times 10^5 m$.

8. Determinaţi viteza de deplasare a unei ambulanţe dacă frecvenţa recepţionată la apropiere esre de 560Hz iar la îndepărtare este de 480Hz.

Răspuns: $v = 26,4m/s$.

9. Coarda unei viori are lungimea de 0,350m şi este acordată pe frecvenţa fundamentală $f_G = 392$Hz. Unde trebuie să apese violonistul pentru a produce un sunet de frecvenţă $f_A = 440$Hz?

Răspuns:$L = 0,312m$.

10. Determinaţi lungimea unui tub care are frecvenţa fundamentală de 240Hz, dacă:

(a) tubul este închis la unul din capete;

(b) tulbul este deschis la ambele capete. *Răspuns*:(a)$\lambda = 4L; L = 0,357m$; (b)$\lambda = 2L; L = 0,715m$.

Glosar

amplitudine
    absorbtivă, 28
    elastică, 28
analiză spectrală, 32
armonici, 32

bătăi, 15

ciclu de histerezis, 42
coeficient
    de amortizare, 20
configuraţia modului, 11
constanta de timp, 21

decrement logaritmic al amortizării, 21

ecuaţia
    caracteristică, 3
    seculară, 13

factor de calitate, 21
faza, 56
fazor, 4
frecvenţa, 2
    bătăilor, 15
    fundamentală, 32
front de undă, 56

impedanţa, 31
intensitatea undei, 62

lărgimea curbei de rezonanţă, 27
lungime de undă, 56

mişcare oscilatorie, 1

moduri normale, 10

număr de undă, 56

oscilaţii
    anarmonice, 34
    de relaxare, 38

pendul
    de torsiune, 44
    matematic, 5
perioada, 3
pulsaţia, 2
puncte de bifurcaţie, 40

regim
    permanent, 25
rezonanţa amplitudinii, 26

serie Fourier, 32
sinteza Fourier, 33
spectru
    de amplitudine, 32
    de puteri, 33

tansformata Fourier, 33
timp
    tranzitoriu, 24

unde
    plane progresive, 57
    plane regresive, 57

viteza
    de grup, 62
    de fază, 57